Analyse 5 L3-math
Études de convergences en analyse

Renaud Leplaideur

2018

UNC

Table des matières

Chapitre 1

Interversions de limites

1.1 Motivations et exemples

Quelques exemples

Beaucoup de problèmes en analyse sont en fait des problèmes d'interversion de limites. Si on a $f(x, y)$ a-t-on nécessairement l'égalité

$$\lim_{y \to y'} \lim_{x \to x'} f(x, y) = \lim_{x \to x'} \lim_{y \to y'} f(x, y) \ ?$$

La réponse est non. Voici quelques théorèmes qui font explicitement référence à une interversion de limite.

Théorème 1.1.1. *Si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f alors f est continue.*

On a $\boxed{\lim_{x \to x'} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{x \to x'} f(x) = f(x') = \lim_{n \to +\infty} f_n(x') = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to x'} f_n(x).}$

Théorème 1.1.2. *Si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

On rappelle ici qu'une intégrale est une limite (sommes de Darboux, méthode des rectangles).

Théorème 1.1.3. *Soit f une fonction continue en deux variables x et t. Alors $x \mapsto F(x) := \int_a^b f(x, t)dt$ est continue.*

Théorème 1.1.4. *Soit f une fonction continue en deux variables x et t. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue alors*

$$x \mapsto F(x) := \int_a^b f(x, t)dt$$

est dérivable et $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt$.

Il est aussi naturel de se demander si lorsqu'on dispose d'une suite (f_n) de fonctions dérivables qui converge vers f alors la limite est dérivable de dérivée la limite des dérivées. On verra que ce résultat est faux mais une version approchée est vraie.

Limites continues ou discrètes

Bien qu'apparemment différents, il est important de voir qu'en fait les théorèmes 1.1.3 et 1.1.4 découlent tous les deux du théorème th-unifinte.

D'une part la continuité en un point (x) se montre aussi en prouvant que pour toute suite (x_n) convergente vers x, $F(x_n)$ converge vers $F(x)$.

En choisissant une suite (x_n) on pose $f_n(t) = f(x_n, t)$. Donc le théorème 1.1.3 découlent du théorème th-unifinte.

La dérivabilité s'obtiendra en étudiant $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$. Si on pose $g(h,t) = \frac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}$, on voit que le théorème 1.1.4 découle du théorème 1.1.3.

1.2 Une convergence est uniforme

1.2.1 Rappels sur la convergence uniforme

Définition 1.2.1. *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si pour tout x, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$.*

En d'autres termes la convergence simple signifie que pour chaque coordonnée il y a convergence, mais indépendamment des autres coordonnées.

Définition 1.2.2. *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si la suite numérique de terme $||f_n - f||_\infty$ converge vers zéro.*

La convergence uniforme entraîne la convergence simple (à faire en exercice). Elle signifie que non seulement toutes les coordonnées convergent vers $f(x)$ mais que cette convergence se fait "à la même vitesse" pour toutes les coordonnées (le terme "uniforme" est donc bien choisi).

La convergence simple s'écrit :
$\forall x$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Le N dépend de x et de ε.
La convergence uniforme s'écrit :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$ et $\forall x$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Le N est le même pour tous les x et ne dépend que de ε.

Exemple 1. La suite de fonction $x \mapsto x^n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1[$. La convergence n'est pas uniforme. La convergence uniforme se voit sur le graphe (voir figure 1.1).

1.2.2 Interversion de limite

Théorème 1.2.3. *Soit $(\varphi_{n,m})$ une (double) suite réelle dépendant des deux indices n et m. On suppose que pour n fixé, la suite $(\varphi_{n,m})_m$ converge vers $\varphi_{n,+\infty}$, et que pour m fixé, la suite $(\varphi_{n,m})_n$ converge vers $\varphi_{+\infty,m}$. Enfin, on suppose que la suite $(\varphi_{n,+\infty})_n$ converge vers $\varphi_{+\infty,+\infty}$ lorsque n tends vers $+\infty$. Si l'une des deux convergences de $(\varphi_{n,m})$ avec l'un*

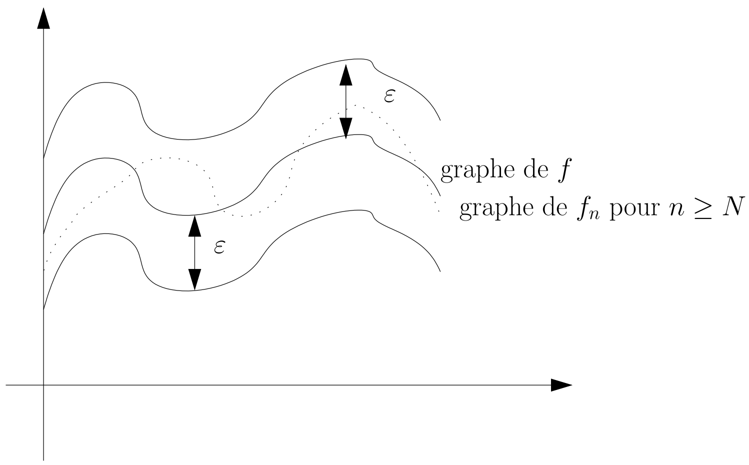

FIGURE 1.1 – convergence uniforme

des indice fixé est uniforme (par rapport à cet indice fixé), alors $(\varphi_{+\infty,m})_m$ *converge aussi lorsque* m *tend vers* $+\infty$ *et sa limite est* $\varphi_{+\infty,+\infty}$.

Le même résultat demeure si on suppose que c'est la suite $(\varphi_{+\infty,m})$ *qui converge vers* $+\varphi_{+\infty,+\infty}$.

Le théorème se comprends mieux avec un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{n,m} & \longrightarrow & \varphi_{+\infty,m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi_{n,+\infty} & \longrightarrow & \varphi_{+\infty,+\infty} \end{array}$$

Si l'une des deux convergences est uniforme et si la double limite existe, alors on peut la calculer dans n'importe quel sens.

Ce théorème est l'outil clef pour inverser les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \stackrel{?}{=} \lim_{m\to+\infty} \lim_{n\to+\infty}$$

Démonstration. On considère par exemple que la convergence en m est uniforme vis à vis de n. Ceci signifie :

$$\forall\varepsilon, \exists M,\ t.q.\ \forall m \geq M,\ \forall n|\varphi_{n,m} - \varphi_{n,+\infty}| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Par ailleurs nous disposons de l'hypothèses de convergence de $(\varphi_{n,+\infty})$ vers $\varphi_{+\infty,+\infty}$ et de convergence de $\varphi_{n,m}$ vers $\varphi_{+\infty,m}$.

On veut montrer que $\varphi_{+\infty,m}$ converge vers $\varphi_{+\infty,+\infty}$. Fixons donc $\varepsilon > 0$. On commence par prendre M tel que (1.1) soit valide avec $\varepsilon/3$.

On a donc pour tout n et pour tout $m \geq M$, $|\varphi_{n,M} - \varphi_{n,+\infty}| < \varepsilon/3$. Pour ce $m \geq M$ fixé, la suite $(\varphi_{n,m})_n$ converge vers $\varphi_{+\infty,m}$ lorsque n tend vers $+\infty$. À m fixé, on trouve donc un entier $N(m)$ (qui dépend donc de m) tel que pour tout $n \geq N(m)$,

$$|\varphi_{n,m} - \varphi_{+\infty,m}| < \varepsilon/3.$$

Enfin, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|\varphi_{n,+\infty} - \varphi_{+\infty,+\infty}| < \varepsilon/3$. À $m \geq M$ fixé, considérons donc n plus grand que N et que $N(m)$. On a alors

$$|\varphi_{+\infty,m} - \varphi_{+\infty,+\infty}| \leq |\varphi_{+\infty,m} - \varphi_{n,m}| + |\varphi_{n,m} - \varphi_{n,+\infty}| + |\varphi_{n,+\infty} - \varphi_{+\infty,+\infty}|.$$

Le premier terme de droite est inférieur à $\varepsilon/3$ par convergence (uniforme), le second est inférieur à $\varepsilon/3$ par convergence simple, et le dernier par convergence simple (vers la double limite).

Si on suppose que c'est $(\varphi_{+\infty,m})$ qui converge vers $+\varphi_{+\infty,+\infty}$ on utilise la majoration :

$$|\varphi_{n,+\infty} - \varphi_{+\infty,+\infty}| \leq |\varphi_{n,+\infty} - \varphi_{n,m}| + |\varphi_{n,m} - \varphi_{+\infty,m}| + |\varphi_{+\infty,m} - \varphi_{+\infty,+\infty}|.$$

(A faire en exercice). □

Remarque 1. On peut généraliser ce résultat à des convergences dans des espaces métriques quelconques, et à des convergences "continues". ■

1.2.3 Applications

Comme nous l'avons dit en introduction, le deux théorèmes 1.1.1 et 1.1.2 sont des conséquences immédiates du théorème d'interversion de limites.

Concernant la questions sur les dérivées, on dispose du théorème suivante :

Théorème 1.2.4. *Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. On suppose que la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément vers g. Si de plus il existe $c \in [a,b]$ tel que la suite numérique $(f_n(c))$ converge, alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f. De plus f est dérivable et $f' = g$.*

Démonstration. On note l'égalité $f_n(x) = \int_c^x f'_n(t)dt + f_n(c)$. Le théorème 1.1.2 montre que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = l + \int_c^x g(t)dt,$$

où $l = \lim_{n\to+\infty} f_n(c)$. En particulier f est dérivable de dérivée g puisque g est continue.

De plus

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(c) - l + \int_c^x f'_n(t) - g(t) \right| \\ &\leq |f_n(c) - l| + \left| \int_c^x |f'_n(t) - g(t)|dt \right| \\ &\leq |f_n(c) - l| + \int_a^b |f'_n(t) - g(t)|dt. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité montre que la convergence est uniforme.

□

1.3 Hypothèses de domination

1.3.1 Convergence normale

Définition 1.3.1. *On considère une série de fonctions $\sum f_n$ définies sur $[a,b]$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement s'il existe une suite numérique (a_n) telle que*

1. $\sum_n a_n$ *converge.*
2. *Pour tout n et pour tout x, $|f_n(x)| \leq a_n$.*

On note en particulier que les termes a_n sont positifs. La convergence normale entraine la convergence uniforme. Elle permet donc d'intervertir les limites.

Théorème 1.3.2. *Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, alors elle converge absolument et uniformément. En particulier si les f_n sont continues la limite est continue.*

Exemple 2. Ce théorème est souvent utilisé pour les séries entières, c'est à dire f_n de la forme $f_n(x) = r_n x^n$. On montre que pour tout $r < R$ (R= le rayon de convergence), il y a convergence normale dans le disque de rayon r.

Preuve du théorème 1.3.2. L'absolue convergence est une application directe du critère de Cauchy et de la domination.

$$\sum_p^q |f_n(x)| \leq \sum_p^q a_n.$$

On utilise le critère de Cauchy sur la série des a_n.

L'uniforme convergence se fait presque de façon identique. Si on veut comparer un terme de la série avec la limite, on doit estimer la queue de la série

$$\left|\sum_{n\geq p} f_n(x)\right|.$$

Le critère de Cauchy permet une fois encore d'obtenir une majoration du type

$$|\sum_p^q f_n(x)| \leq \sum_p^q a_n < \varepsilon,$$

dès que p et q sont suffisamment grands. On fait tendre q vers l'infini dans cette double inégalité. Comme elle est vraie pour tout x on en tire

$$\sup_x \left|\sum_{n\geq p} f_n(x)\right| \leq \varepsilon,$$

si p est suffisamment grand (à ε fixé). □

1.3.2 Intégrales généralisées à paramètre

Nous donnons ici trois versions apparemment différentes du même théorème. Le point commun, outre que l'on peut passer d'un théorème à l'autre en choisissant le bon formalisme, est l'utilisation dans chaque cas d'une hypothèse de domination.

Théorème 1.3.3. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b[$ avec $a < b$[1]. On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que*

1. *pour chaque n, et pour chaque t, $|f_n(t)| \leq g(t)$,*
2. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

Alors $\int_a^b f_n(t)dt$ existe. Si de plus il existe f telle que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers f et telle que $\int_a^b f(t)dt$ existe, alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Théorème 1.3.4. *Soient $f : [a, b[\times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue où $a < b$[2] et J est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que*

1. *pour chaque x, et pour chaque t, $|f(t, x)| \leq g(t)$,*
2. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

Alors $x \in J \mapsto F(x) = \int_a^b f(t, x)dt$ définit une fonction continue sur J.

Démonstration. Comme précédemment, la continuité en un point x signifie que pour toute suite (x_n) qui converge vers x, $F(x_n)$ converge vers $F(x)$. Si x et (x_n) sont fixés on peut poser

$$f_n(t) := f(t, x_n).$$

La continuité de f montre que f_n tend vers la fonction $t \mapsto f(t, x)$. Donc le théorème 1.3.4 se déduit du théorème 1.3.3. □

Théorème 1.3.5. *Soit J un intervalle ouvert. Soit $f : [a, b[\times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue et il existe une fonction continue g vérifiant*

1. *pour chaque x l'intégrale $\int_a^b f(t, x)dt$ converge.*
2. *pour chaque x, et pour chaque t, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leq g(t)$,*
3. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

Alors la fonction définie par $F(x) = \int_a^b f(t, x)dt$ est de classe C^1 et

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt.$$

1. Penser à $b = +\infty$
2. Penser à $b = +\infty$

Démonstration. À nouveau, on se fixe x et on pose pour $h \neq 0$, $\phi(t,h) = \dfrac{f(t,x+h)-f(t,x)}{h}$. On la prolonge par continuité en $\phi(t,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$. Le théorème des accroissements finis montrer que pour tout t et pour tout h,

$$\phi(t,h) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,u_h),$$

avec u_h entre x et $x+h$. Donc u_h tend vers x si h tend vers 0. Cela nous permet d'appliquer le théorème 1.3.4. □

Pour simplifier l'intégrale généralisée du théorème 1.3.3, on se place dans le cas $b = +\infty$ et $a = 0$. Notez qu'on peut toujours écrire une intégrale généralisée sous cette forme.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_k(n) := \int_k^{k+1} f_n(t)dt \text{ et } A_k := \int_k^{k+1} g(t)dt.$$

L'hypothèse de domination $|f_n(t) \leq g(t)|$ donne alors $|a_k(n)| \leq A_k$.

L'hypothèse de convergence en g s'écrit $\sum_k A_k < +\infty$. En d'autres termes, on retrouve simplement la convergence normale sur les séries.

L'hypothèse de convergence de (f_n) sur tout compact montre que pour tout k, $a_k(n)$ tend vers $\int_k^{k+1} f(t)dt$ si $n \to +\infty$.

1.3.3 Application : théorème de Dirichlet de convergence des séries de Fourier

Rappel sur les coefficients de Fourier

On s'intéresse à une écriture (éventuelle) sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}.$$

Proposition 1.3.6. *Si la convergence est uniforme, alors nécessairement on doit avoir* $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$*.*

Démonstration. On a $\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikt}e^{-int}dt$. On utilise l'interversion de limitespuisque la convergence en k est uniforme, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}dt.$$

On vérifie que dans le série, tous les termes sont nuls sauf celui pour $k = n$ qui vaut 2π. □

Définition 1.3.7. *On considère f une fonction continue*[3] *de $[0,2\pi]$ dans $\mathbb{C}$. Dans toute la suite on notera*

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt,$$

et on l'appellera n-ième coefficient de Fourier de f.

Si f est à valeur réelle on posera également

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \text{ et } b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Ils seront appelées coefficients réels de Fourier de f. On pourra retenir les formules

$$\boxed{\begin{array}{l} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}). \end{array}}$$

On rappelle l'égalité

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)). \tag{1.2}$$

Le théorème de Dirichlet

Théorème 1.3.8. *Si f est une fonction $\mathcal{C}^2$ 2π-périodique alors*

$$f(x) := \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx},$$

et la convergence est uniforme.

Démonstration. • On commence par montrer que les coefficients de Fourier de f sont des $O(\frac{1}{k^2})$. En effet, une double intégration par parties donne

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(f) &= \int_0^{2\pi} f(t)e^{ik.t}dt \\ &= \frac{1}{ik}\left[f(t)e^{ik.t}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} f't)e^{ik.t}dt \\ &= 0 - 0 - \frac{1}{k^2}\left[f'(t)e^{ik.t}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{ik.t}dt \\ &= \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{ik.t}dt. \end{aligned}$$

comme f est $\mathcal{C}^2$, f'' est continue donc bornée sur le segment $[0,2\pi]$ et donc il existe M tel que pour tout k,

$$\left|\int_0^{2\pi} f''(t)e^{ikt}dt\right| \leq \int_0^{2\pi} |f''(t)|\,dt \leq 2\pi M.$$

• La série $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx}$ converge uniformément car normalement. Si on note g la limite, on obtient donc que pour tout k,

$$c_k(g) = c_k(f).$$

Le théorème de Féjer entraine que nécessairement $f = g$. □

3. On peut aussi supposer seulement f continue par morceaux, voire f Riemann-intégrable

1.4 D'autres théorèmes de contrôle de convergence : les théorèmes de Dini

Les théorèmes de Dini ne sont pas à proprement paré des théorèmes d'interversion de limite. Ils montrent cependant qu'un peu de régularité entraine des convergences plus fortes. Ces résultats illustrent un des but des chapitres ultérieurs. Trouver des arguments pour qu'une suite de fonction converge (dans le bon espace pour la bonne norme).

Théorème 1.4.1. *Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue f.*

1. *Si chaque fonction f_n est croissante, alors la convergence est uniforme.*
2. *Si la suite est croissante (i.e., $f_n \leq f_{n+1}$) alors la convergence est uniforme.*

Démonstration. On suppose donc que chaque f_n est croissante. Comme f est continue, elle est uniformément continue sur le segment $[a, b]$. Elle est aussi croissante puisque pour $x \leq y$ l'inégalité

$$f_n(x) \leq f_n(y)$$

valide pour tout n passe à la limite.

On se fixe $\varepsilon > 0$. Il existe η tel que $|x - y| < \eta$ entraine $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On se donne une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_I = b,$$

de pas $(\max a_{i+1} - a_i)$ inférieur à η.

On choisit aussi N tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout i, $|f_n(a_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Soit x dans $[a, b]$. Soit i tel que $a_i \leq x \leq a_{i+1}$.

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)| \\
&\leq f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i) + \varepsilon + f(a_{i+1}) - f(a_i) \\
&\leq f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1}) + f(a_{i+1}) - f(a_i) + f(a_i) - f_n(a_i) + +2\varepsilon \\
&\leq 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pour démontrer le second résultat, on pose $g_n := f - f_n$. c'est une suite décroissante de fonctions qui converge simplement vers 0. On note aussi $\alpha_n := ||g_n||_\infty$. La suite (α_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Notons α sa limite. La convergence uniforme signifie $\alpha = 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons $\alpha > 0$. On pose

$$K_n = g_n^{-1}\left(\left[\frac{\alpha}{2}, +\infty\right[\right).$$

C'est un fermé de $[a, b]$ donc un compact (fermé dans un compact). Par hypothèse il est non vide. De plus la décroissance de (g_n) montre que K_{n+1} est inclus dans K_n (si $g_{n+1}(x) < \frac{\alpha}{2}$ alors $g_n(x)$ est a fortiori supérieur à $\frac{\alpha}{2}$).

L'ensemble $\bigcap_n K_n$ est non vide et il existe x tel que pour tout n, $g_n(x) > \dfrac{\alpha}{2}$. Cela contredit la convergence simple.

□

Chapitre 2

Espaces Vectoriels Normés

2.1 Normes sur un espace

2.1.1 Définition et distance associée

Nous considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Il s'agit de mettre une structure topologique qui respecte la structure vectorielle.

Définition 2.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E toute application $|| \ || : E \to \mathbb{R}_+$ telle que*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout x dans E, $||\lambda.x|| = |\lambda|.||x||$.*
2. *Pour tout x et y dans E, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité triangulaire).*
3. *Si $||x|| = 0$ alors $x = 0$.*

Un espace vectoriel muni d'une norme s'appelle un espace vectoriel normé.

Définition 2.1.2. *soit $(E, || \ ||)$ un espace vectoriel normé (evn en abrégé). On appelle distance associée à la norme la fonction*

$$\begin{array}{rcl} d : E \times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & ||x - y||. \end{array}$$

On remarquera que l'espace (E, d) est un espace métrique.

Cette distance permet de définir la distance entre un point x de E et une partie non vide A de E en posant

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y), \ y \in A\}.$$

On notera que cette borne inférieure est bien définie car l'ensemble considéré n'est pas vide (A est non vide) et est minoré dans $\mathbb{R}$ (par 0).

Exemple 3. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne (norme $|| \ ||_2$) on peut calculer la distance d'un point à une droite.

2.1.2 Exemples

1- L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue est une evn.

2- Dans $\mathbb{K}^n$, $||(x_1,\ldots,x_n)||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$, $||(x_1,\ldots,x_n)||_2 = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$ et $||(x_1,\ldots,x_n)||_\infty = \max\limits_i(|x_i|)$.

3- Dans l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$on aura $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ (= " $\sum_{t\in[0,1]} |f(t)|$ "), $||f||_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $||f||_\infty = \sup |f(t)|$. Notez que $||\ ||_\infty$ s'appelle la *norme de la convergence uniforme.*

4- Sur l'espace $\mathcal{S}$ des suites réelles on pose $||\underline{u}||_p = \left(\sum\limits_n |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $||\underline{u}||_\infty = \sup\limits_n |u_n|$. On introduit alors le sous-espace l^p $(p \leq +\infty)$ des suites $\underline{u}$ définies par

$$\underline{u} \in l^p \iff ||\underline{u}||_p < \infty.$$

Ainsi l^∞ est l'ensemble des suites bornées. Sur l^p, $||\ ||_p$ est une norme.
Il n'est *a priori* pas simple de voir que l^p est un sous-espace vectoriel. En fait on démontre en même temps que c'est une sous-espace et qu'il est normé.

Lemme 2.1.3. *Soit α dans $]0,1[$. Soient u et v deux réels strictement positifs. Alors $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v$, avec égalité si et seulement si $u = v$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $u^\alpha v^{1-\alpha} = e^{\alpha \log u + (1-\alpha)\log v}$ et d'utiliser la stricte convexité de l'application exponentielle. □

Lemme 2.1.4 (Inégalité de Hölder)**.** *Si $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont respectivement dans l^p et l^q avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, alors la suite $\underline{uv}$ dont le terme général est $u_n v_n$ est dans l^1 et vérifie*

$$\sum |u_n v_n| \leq ||\underline{u}||_p ||\underline{v}||_q.$$

Démonstration. On pose $u = \left|\frac{u_n}{||\underline{u}||_p}\right|^p$ et $v = \left|\frac{v_n}{||\underline{v}||_q}\right|^q$. Le lemme 2.1.3 donne

$$u^{\frac{1}{p}}.v^{\frac{1}{q}} = \frac{|u_n|}{||\underline{u}||_p}\frac{|v_n|}{||\underline{v}||_q} \leq \frac{1}{p}\left|\frac{u_n}{||\underline{u}||_p}\right|^p + \frac{1}{q}\left|\frac{v_n}{||\underline{v}||_q}\right|^q.$$

En sommant sur n on trouve donc $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n v_n|}{||\underline{u}||_p ||\underline{v}||_q} \leq \frac{1}{p}\sum\limits_n |u_n|^p \frac{1}{||\underline{u}||_p^p} + \frac{1}{q}\sum\limits_n |v_n|^q \frac{1}{||\underline{v}||_q^q} = 1.$
D'où

$$\sum |u_n v_n| \leq ||\underline{u}||_p ||\underline{v}||_q.$$

□

Lemme 2.1.5 (Inégalité de Minkowski)**.** *Si $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont dans l^p, alors $||\underline{u}+\underline{v}||_p \leq ||\underline{u}||_p + ||\underline{v}||_p$*

Démonstration. On écrit $|u_n+v_n|^p = |u_n+v_n|.|u_n+v_n|^{p-1} \leq |u_n||u_n+v_n|^{p-1} + |v_n||u_n+v_n|^{p-1}$. On applique l'inégalité de Hölder avec p et $\frac{p}{p-1}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\sum_n |u_n+v_n|^p &\leq \sum_n |u_n||u_n+v_n|^{p-1} + \sum_n |v_n||u_n+v_n|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_n |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n |u_n+v_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_n |v_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n |u_n+v_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (2.1)
\end{aligned}$$

De plus $(||\underline{u}+\underline{v}||_p)^p = \sum_n |u_n+v_n|^p = \left(\sum_n |u_n+v_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}+\frac{1}{p}}$. La majoration (2.1) permet donc de conclure la preuve du lemme. $\square$

C'est aussi l'inégalité de Minkowski qui permet de prouver que l^p est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1
Si f est une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit qu'elle est Lipschitz s'il existe C tel que pour tout x et y,

$$|f(x)-f(y)| \leq C.|x-y|.$$

Pour f Lipschitz on définit alors $||f||_{Lip} := ||f||_\infty + \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$. Montrer que cela définit une norme sur l'espace des fonctions Lipschitz.

2.2 Rappels de topologie

2.2.1 Ouverts fermés, intérieurs, adhérences

Ouverts et fermés

On se fixe est un espace vectoriel normé $(E, ||\ ||)$.
• La boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ est l'ensemble

$$B(x,\varepsilon) := \{y,\ ||x-y|| < \varepsilon\}.$$

La boule fermée est $B_f(x,\varepsilon) := \{y,\ ||x-y|| \leq \varepsilon\}$.

• Un ensemble A est dit ouvert si pour tout x dans A il existe ε (qui dépend de x et de A) tel que la boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ soit dans A.

• Un ensemble A est fermé si son complémentaire $E \setminus A$ est ouvert.

• E et $\emptyset$ sont ouverts et fermés.

• Une union quelconque d'ouverts est ouverte. Une intersection finie d'ouverts est ouverte. Une intersection quelconque de fermés est fermée, une union finie de fermés est fermée.

• Une boule ouverte est ouverte. Une boule fermée est fermée.

• Un ensemble A est fermé si et seulement toute suite dans A qui converge a sa limite dans A.

Intérieur, adhérence

• L'intérieur d'un ensemble A est l'union de tous les ouverts contenus dans A. C'est aussi le plus grand ouvert (pour l'inclusion) contenu dans A. Il se note $\mathring{A}$.

• L'adhérence (ou fermeture) d'un ensemble A est l'intersection de tous les fermés qui le contiennent. C'est aussi le plus petit fermé (pour l'inclusion) qui contient A.

• L'adhérence de la boule ouverte est la boule fermée. On a donc $B_f(x,\varepsilon) = \overline{B(x,\varepsilon)}$.

• Un point x appartient à l'adhérence de A si et seulement si toute boule $B(x,\varepsilon)$ a une intersection non vide avec A.

• De même, $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite de points de A qui converge vers x.

• L'intérieur du complémentaire est le complémentaire de la fermeture :

$$\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}.$$

• La fermeture du complémentaire est le complémentaire de l'intérieur.

$$\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}.$$

2.2.2 Continuité

On se donne un autre evn $(F|\ |)$ et une application $f : E \to F$.

• Une application est continue en un point x si pour toute suite (x_n) qui converge vers x, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Une application est continue si elle est continue partout.

• Une application est continue en x si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho > 0 \ ||x - y|| < \rho \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

• $f : E \to F$ est continue si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.

• $f : E \to F$ est continue si l'image réciproque de tout fermé est un fermé.

• l'image directe par une application continue d'un ouvert ou d'un fermé n'est pas nécessairement ouverte ou fermée.

2.2.3 Compacité

• Un ensemble est dit compact si de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.

• Un ensemble K est compact si et seulement si toute suite à valeur dans K admet une valeur d'adhérence [1].

• Un compact est fermé et borné. La réciproque n'est pas nécessairement vraie.

• Un fermé dans un compact est compact.

• L'image directe par une fonction continue d'un compact est compacte. Ce n'est pas nécessairement vrai pour l'image réciproque.

• Une fonction continue sur un compact est uniformément continue (Théorème de Heine).

• Une fonction numérique définie sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

2.2.4 Complétude

• Une suite (x_n) est dite de Cauchy si elle satisfait :

$$\forall \varepsilon \ \exists N \ \forall n, p \geq N, \ \ ||x_n - x_p|| < \varepsilon.$$

• Une suite convergente est de Cauchy.

1. *i.e.,* une suite-extraite convergente.

• Une suite de Cauchy ne peut admettre au plus qu'une seule valeur d'adhérence. Si elle en admet une, elle converge.

• Un espace est dit complet si toute suite de Cauchy converge. Une partie est dite complète si toute suite de Cauchy dans cette partie converge.

• Un compact est complet, même si l'espace global ne l'est pas.

• Théorème de Baire : dans un espace complet, une intersection d'ouverts denses est dense (mais pas nécesairement ouverte). Application : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

2.2.5 Quelques applications

Le lemme d'Urysohn :

Soient K un compact dans un espace métrique (E,d) et U un ouvert qui contient K. Alors il existe une application continue ϕ de E dans $[0,1]$ qui vaut 0 sur $E\setminus U$ et 1 sur K.

Démonstration. On pose $F = E \setminus U$; c'est un fermé. La fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = d(x,F)$ est continue (à faire en exercice) et vaut 0 sur F. Sur K, φ est continue et donc bornée et atteint ses bornes. Soit δ le minimium de φ sur K ; on pose $\phi(x) = \min(1, \frac{1}{\delta}\varphi(x))$. □

2.3 Applications linéaires continues

2.3.1 L'evn $\mathcal{L}(E,F)$

Caractérisation des applications linéaires continues : définition de la triple-norme

Nous rappelons qu'une application f de l'evn $(E, ||\ ||_E)$ dans l'evn$(F, ||\ ||_F)$ est continue si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Pour tout x de E, l'image réciproque d'un voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x.
2. L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.
3. L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

On rappelle aussi que la propriété (1) s'exprime de la façon suivante :

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0,\ \text{t.q. } ||x-y||_E < \rho \Longrightarrow ||f(x) - f(y)||_F < \varepsilon \tag{2.2}$$

On rappelle aussi qu'une application f de E dans F est uniformément continue si elle vérifie la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0,\ \text{ tel que } \forall x \in E,\ y \in B(x,\rho) \Longrightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon).$$

On se fixe deux evn $(E, ||\ ||_E)$ et $(F, ||\ ||_F)$. On s'intéresse aux applications qui sont continues et linéaires (conservation de la structure vectorielle et normée).

Définition 2.3.1. *Soit f dans $L(E,F)$ (f linéaire). On définit (dans $\overline{\mathbb{R}}$)*

$$|||f||| \overset{déf}{=} \sup_{x\in B(0,1)\ x\neq 0} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E} = \sup_{x\in S(0,1)} ||f(x)||_F = \sup_{x\neq 0} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E}.$$

Exercice 2
Montrer l'égalité de ces 3 définitions.

Théorème 2.3.2. *Les conditions suivantes sont équivalents :*

1. *f est continue en* 0.
2. *f est continue*
3. *f est uniformément continue.*
4. $|||f||| < +\infty$

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F.

Démonstration. $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ est évident. Faisons $1 \Rightarrow 4$.
Comme f est linéaire on a $f(0_E) = 0_F$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\rho(= \eta(0, \varepsilon))$ tel que pour tout x dans $B(0, \rho)$ on ait $||f(x)||_F < \varepsilon$. Si y est dans $B(0, 1)$, alors $\rho.y$ est dans $B(0, \rho)$ et donc

$$||f(y)||_F = ||f(\frac{1}{\rho}\rho.y)||_F = ||\frac{1}{\rho}f(\rho.y)||_F = \frac{1}{\rho}||f(\rho.y)||_F < \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

$4 \Rightarrow 3$. Il suffit de remarquer que f est lipschitzienne :

$$||f(x) - f(y)|| = ||f(x - y)|| = ||x - y||.||f(\frac{x - y}{||x - y||})|| \leq |||f|||.||x - y||.$$

$\square$

Exemples 4.
1- Une matrice $m \times n$ va définir une application linéaire continue de $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$ (ici nous verrons bientôt que peu importe de préciser les normes).
2- Notion de dual topologique. Si E est une $\mathbb{R}$-ev, l'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ s'appelle le dual topologique de E. Dual, car on regarde les formes linéaires (applications linéaires de E sur son corps de base) et topologique pour marquer qu'on regarde les formes continues. Par exemple si $E = (\mathcal{C}_c, || \, ||_\infty)$ est l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie, alors son dual topologique est l'ensemble des mesures de Radon signées (théorème de Riesz).

Exercice 3
Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $|| \, ||_\infty$. Montrer que l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue) définie par $\varphi(f) = f(0)$ est continue (et linéaire).

Exercice 4
Dans $F = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $|| \, ||_\infty$, montrer que l'application $f \mapsto f'(0)$ n'est pas continue.

La triple-norme est une norme

Proposition 2.3.3. *L'ensemble $(\mathcal{L}(E, F), ||| \, |||)$ est un evn. De plus si g est dans $\mathcal{L}(F, G)$ et f dans $\mathcal{L}(E, F)$, alors*

$$|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||.$$

Démonstration. Comme $\mathcal{L}(E,F)$ est inclus dans $L(E,F)$ nous allons montrer que c'est un sous-ev. Il est non vide car il contient 0 (l'application nulle).
Soient f et g dans $\mathcal{L}(E,F)$ et α dans $\mathbb{R}$. A-t-on $\alpha.f+g$ dans $\mathcal{L}(E,F)$? Pour évaluer $|||\alpha.f+g|||$ commençons par nous fixer x dans $E\cap B(0,1)$. On a

$$||(\alpha.f+g)(x)|| = ||\alpha.f(x)+g(x)|| \leq |\alpha|.||f(x)||+||g(x||. \tag{2.3}$$

En majorant chacun des termes de droite de (2.3) par leur triple norme on peut ensuite passer au sup dans le terme de gauche pour obtenir $|||\alpha.f+g||| \leq |\alpha|.|||f|||+|||g|||$. Ceci prouve que $\alpha.f+g$ est dans $\mathcal{L}(E,F)$ et donc $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-ev.
Reste à prouver que $|||\ |||$ est une norme. C'est laissé en exercice. □

2.3.2 Normes équivalentes

homéomorphismes

Si $f:E\to F$ est continue et bijective, rien ne garantit que la bijection réciproque f^{-1} est aussi continue, comme le montre l'exemple suivant :

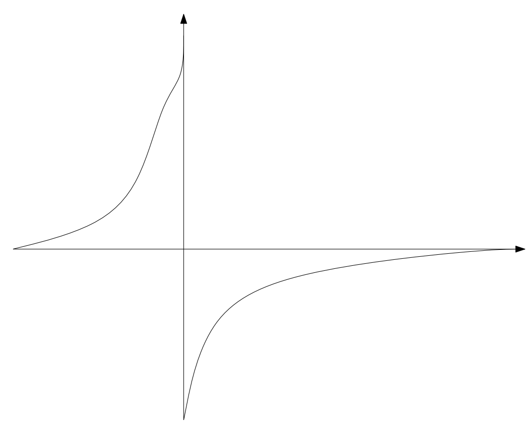

FIGURE 2.1 – Application continue bijective à réciproque non-continue

L'application f est définie sur $[-1,0[\cup]0,+\infty[$, est strictement croissante sur chaque intervalle et vérifie

$$f([-1,0[)=[0,+\infty[,:f(]0,+\infty[)=]-\infty,0[.$$

Elle est continue bijective de $\mathcal{D}_f$ sur $\mathbb{R}$ mais la bijection réciproque n'est pas continue en 0. Cela justifie une définition supplémentaire :

Définition 2.3.4. *Une application $f:E\to F$ est un homéomorphisme si c'est une bijection* bi-continue*, c'est à dire telle que f et f^{-1} sont continues.*

Deux espaces $(E,||\ ||_E)$ et $(F,||\ ||_F)$ sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de l'un vers l'autre.

Si f est un homéomorphisme de l'evn $(E,||\ ||_E)$ dans l'evn $(F,||\ ||_F)$ la continuité de f et de f^{-1} montrent qu'il existe 2 constantes A et B telles que pour tout x dans E

$$A||x||_E \leq ||f(x)||_F \leq B||x||_E.$$

Equivalence des normes

On se fixe sur E deux normes $|| \ ||$ et $| \ |$.

Définition 2.3.5. *Les deux normes sont dites équivalentes si elle vérifient l'une des 2 propriétés (équivalentes) suivantes :*

1. *L'application identité Id de $(E, || \ ||)$ dans $(E, | \ |)$ est un homéomorphisme (linéaire).*
2. *Il existe deux réels strictement positifs a et b tels que pour tout x dans E,*

$$a|x| \leq ||x|| \leq b|x|.$$

Prouvons l'équivalence de ces 2 propriétés.
Si Id est un homéomorphisme, elle est continue donc $|||Id|||$ existe. Or par définition de $|||Id|||$ on aura pour tout x non nul de E,

$$|x| = |Id(x)| \leq |||Id|||.||x||.$$

Ceci produit le a. De même Id' de $(E, | \ |)$ dans $(E, || \ ||)$ est continue donc cela produira le b.
Réciproquement, si on a *2* alors Id est continue et bijective et sa bijection réciproque est aussi continue. Donc c'est un homéomorphisme.

Exemples 5.
1- Dans $\mathbb{R}^n$ les normes $|| \ ||_\infty$ et $|| \ ||_1$ sont équivalentes. On a même

$$||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n.||x||_\infty.$$

2- Dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ les normes $|| \ ||_\infty$ et $|| \ ||_1$ ne sont pas équivalentes. On considère la suite de fonctions f_n définies par $f_n(x)$ qui vaut 1 sur $[0, \frac{1}{n}]$, nulle sur $[\frac{2}{n}, 1]$ et affine sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$. On $||f_n||_\infty = 1$ et $||f_n||_1 = \frac{3}{2n}$.

FIGURE 2.2 – Graphe de f_n

2.4 Compacité et EVN

2.4.1 Compacité ou non compacité des boules unités

On considère un evn $(E, || \ ||_E)$. Dans $\mathbb{R}$, les compacts sont les fermés bornés. On se demande donc si la boule unité (fermée) $\overline{B(0,1)}$ est compacte.

Théorème 2.4.1. *Dans $\mathbb{R}^k$ la boule unité fermée pour la norme $|| \ ||_1$ est compacte.*

Démonstration. Il suffit de vérifier qu'une suite (x_n) converge si et seulement si pour chacune des suites coordonnées (dans la base canonique) converge (pour la valeur absolue).

Si on considère une suite dans la boule unité, (x_n) on commence par considérer la suite induite sur la première coordonnée, $(x_{n,1})$. Elle est bornée donc on peut en extraire une sous-suite convergente. Notons la $(x_{\phi(n),1})$. Ensuite on procède de la même manière (puis par récurrence) sur la suite $(x_{\phi(n),2})$. □

Théorème 2.4.2. *En dimension infinie la boule unité fermé n'est pas compacte.*

Démonstration. Elle est basée sur le lemme de Riesz. On choisit y_0 tel que $\|y_0\| = 1$ et on construit une suite (y_n) telle que pour tout n, $\|y_n\| = 1$ et pour tout $p \neq n$, $\|y_n - y_p\| \geq \frac{1}{2}$. Supposons $y_0, \dots, y_n$ construits et construisons y_{n+1}. L'espace $E_n = Vec(y_0, \dots, y_n)$ est de dimension au plus $n+1$, donc c'est un fermé de E d'intérieur vide. Il existe donc z dans $E \setminus E_n$, et comme E_n est fermé on a $d(z, E_n) > 0$. L'application définie sur E_n et qui associe à u la valeur $\|u - z\|$ est continue [2] et strictement positive. Si α vaut $d(z, E_n)$, il existe u dans E_n tel que $\|u - z\| \leq 2\alpha$; on pose alors

$$y_{n+1} = \frac{z - u}{\|z - u\|}.$$

Alors $\|y_{n+1}\| = 1$ et pour tout y dans E_n,

$$\|y_{n+1} - y\| = \frac{\|z - u - \|z - u\|.y\|}{\|z - u\|} \geq \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2},$$

car $u + \|z - u\|.y$ est dans E_n. De (y_n) on ne peut extraire aucune sous-suite convergente. □

Remarque 2. Le théorème de Bolzano-Weierstrass n'est donc pas valable dans un Banach en général !

Ce corollaire explique la nécessité de trouver dans les evn des dimension infinie (typiquement $\mathcal{C}(E, F)$) des critères de compacité ; 2 voies peuvent être explorées :

1. Trouver des critères de compacité sur une famille (par exemple Ascoli).
2. Mettre sur E une topologie qui rende la boule unité fermée compacte. Sur un dual topologique on peut mettre la topologie faible * qui rend la boule unité compacte.

2.4.2 Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 2.4.3. *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. On va montrer que sur $\mathbb{R}^n$ toute les normes sont équivalentes à $\| \ \|_1$.
Première étape. On rappelle que $\| \ \|_\infty \leq \| \ \|_1 \leq n.\| \ \|_\infty$, ce qui prouve que ces 2 normes sont équivalentes. Comme la boule unité fermée est compacte pour $\| \ \|_\infty$ elle l'est pour $\| \ \|_1$.
Deuxième étape. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $A = \max_i N(e_i)$. Si $x = \sum x_i.e_i$, on aura

$$N(x) \leq \sum_i N(x_i.e_i) = \sum_i |x_i|.N(e_i) \leq A.\|x\|_1.$$

Ainsi l'application linéaire $Id : (\mathbb{R}^n, \| \ \|_1) \to (\mathbb{R}^n, N)$ est continue. De plus

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq A.\|x - y\|_1,$$

2. $||u - z|| \leq ||u - u'|| + ||u' - z||$ d'où $||u - z|| - ||u' - z|| \leq ||u - u'||$ ce qui donne par échange des rôles de u et u', $|\, ||u - z|| - ||u' - z||\, | \leq ||u - u'||$.

ce qui prouve que l'application N est continue de $(\mathbb{R}^n, \| \|_1)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$. Comme la sphère $S^n(0,1)$ (pour $|| \, ||_1$) est compacte (pour la topologie induite par $|| \, ||_1$), son image par N est un compact de $\mathbb{R}$; N y est donc bornée et y atteint ses bornes. Il existe alors $a \geq 0$ tel que pour tout x dans $S^n(0,1)$ $N(x) \geq a$. On ne peut pas avoir $a = 0$. En effet, si tel était le cas, il existerait x dans $S^n(0,1)$ vérifiant $N(x) = a = 0$. Or, N est une norme, et $N(x) = 0$ entraine $x = 0 \notin S^n(0,1)$. Ceci prouve donc que Id est un homéomorphisme. □

Remarque 3. On a donc un meilleur résultat que simplement le théorème 2.4.1 : en dimension finie toute boule fermée et compacte pour n'importe quelle norme. ■

2.4.3 Un critère de compacité dans $\mathcal{C}^0$: théorème d'Ascoli

Retour sur la continuité. Equicontinuité

La continuité d'une fonction f est x s'écrit :

$$\forall \varepsilon, \exists \eta, \; y \in B(x, \eta) \Longrightarrow |f(x) - f(y) < \varepsilon.|$$

On considère une famille d'applications, toutes définies sur le même espace X et on veut introduire une notion de continuité indépendante du choix de la fonctions de la famille.

Définition 2.4.4. *Une famille (f_α) de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ est dite* équicontinue *en x si*

$$\forall \varepsilon, \exists \eta, \forall \alpha, \; y \in B(x, \eta) \Longrightarrow |f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| < \varepsilon.$$

La famille est dite equicontinue *si elle est équicontinue en chacun des points de X.*

Exemple 6. Toute famille de fonctions 1-Lipschitz est équicontinue.

Le théorème

Théorème 2.4.5 (Ascoli)**.** *Soit (f_n) une suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ équicontinues. On suppose que pour tout x de $[0,1]$, la suite numérique $(f_n(x))$ est bornée. Alors la suite (f_n) admet au moins une valeur d'adhérence pour la norme $|| \, ||_\infty$.*

Démonstration. La preuve est adaptée au cas particulier de l'intervalle $[0,1]$. Elle est un peu technique mais le principe en est simple.

On va considérer une suite de plus en plus fine de subdivisions de l'intervalle. A chaque génération j, on construira $\psi(j) > \psi(j-1)$ et une application $\phi_j : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que pour tous les points x déjà ou nouvellement choisis définissant les subdivisions les suites $(f_{\phi_j}(x))$ convergent et sont déjà relativement proche de leur limite. Chaque $\psi(j)$ sera de la forme $\psi_j(m_j)$. L'équicontinuité assurera alors que la suite $(f_{\psi(j)})$ est de Cauchy pour $||\lambda||_8$. On utilise ensuite la complétude de $\mathcal{C}^0([0,1])$ pour la norme $||\lambda||_8$ (ce qui sera démontré plus loin).

- *Étape 1* : contrôle des variations. Pour x dans $[0,1]$ et n un entier on pose

$$\omega_{n,x} := \sup\{|f_m(y) - f_m(x)|, \; |x - y| \leq 2^{-n}, \; m \in \mathbb{N}\}.$$

On pose ensuite $\omega_n := \sup_{x\in[0,1]} \omega_{n,x}$. L'équicontinuité montre que (ω_n) décroît[3] vers 0 si n tend vers $+\infty$.

• *Étape 2* : Subdivisions et construction des ψ_j et $\psi(j)$. Amorçage de la récurrence.
On se fixe un entier n et on considère l'ensemble des points $x_{k,n}$ de la forme $\frac{k}{2^n}$. Un tel point est dit de génération n si k est impair. Tous les points dyadiques sont de cette forme (par définition) et sont d'une génération bien définie.

On se fixe un entier n_0 et on considère donc tous les $x_{k,0}$ de la forme $\frac{k}{2^{n_0}}$. Par soucis de simplicité, ils seront tous dits de génération n_0.

Ils sont en nombre finis et ordonnés. On commence par choisir $\phi_0 : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que $f_{\phi_0(m)}(x_{0,0})$ converge, puis ϕ_1 telle que $f_{\phi_0\circ\phi_1(m)}(x_{1,0})$ converge et ainsi de suite. Au final on pose $\psi_0 := \phi_0 \circ \phi_1 \circ \ldots \circ \phi_{2^{n_0}-1}$. C'est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par composition d'applications avec cette propriété. Il existe également 2^{n_0} nombres $a_{k,0}$ tels que chaque suite $(f_{\psi_0(m)}(x_{k,0}))$ converge vers $a_{k,0}$.

On choisit alors m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$ et pour tout k,

$$|f_{\psi_0(m)}(x_{k,0}) - a_{k,0}| < 3^{-n_0}. \tag{2.4}$$

On pose $\psi(0) = \psi_0(m_0)$.

• *Étape 3* : Passage d'une étape à l'étape suivante.
On suppose que l'on a construit jusqu'à l'étape j

1. $\psi(0) < \psi(1) < \ldots \psi(j)$.
2. $\psi_j : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que $\psi(j) = \psi_j(m_j)$ pour un certain m_j.
3. Pour tous les points dyadiques de génération $n_0 + i =\leq n_0 + j$, $x_{k_i,i}$ $(i \leq j)$, il existe $a_{k_i,i}$ tels que pour tout $m \geq m_j$,

$$|f_{\psi_j(m)}(x_{k_i,i}) - a_{k_i,i}| < 3^{-n_0-j}. \tag{2.5}$$

On construit $\psi(j+1) > \psi(j)$ et ψ_{j+1} avec les même propriétés à l'étape suivante.

On considère donc les points dyadiques de génération exactement $j+1$, c'est à dire tous les milieux de deux points consécutifs de génération $\geq j$. On les note $y_{k,j+1}$. On procède comme dans l'étape précédente. Ces points sont ordonnés en fonction de k. Pour $k = 0$ on choisit φ_0 tel que $(f_{\psi_j\circ\varphi_0(m)}(y_{0,j+1}))$ converge vers un $b_{0,j+1}$. De la suite $(f_{\psi_j\circ\varphi_0(m)})$ on extrait une suite $(f_{\psi_j\circ\varphi_0\circ\varphi_1(m)})$ telle que $(f_{\psi_j\circ\varphi_0\circ\varphi_1(m)}(y_{1,j+1}))$ converge vers un $b_{1,j+1}$ et ainsi de suite.

Au final on construit Ψ_{j+1} et on a trouvé des nombres $b_{k,j+1}$ tels que toutes les suites $(f_{\psi_j\circ\Psi_{j+1}(m)}(y_{k,j+1}))$ convergent vers les $b_{k,j+1}$.

Cela définit une fonction $\psi_{j+1} := \psi_j \circ \Psi_{j+1}$ qui est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Pour tous les dyadiques $x_{k_i,i}$ de génération $n_0 + i \leq n_0 + j$, la suite $(f_{\psi_{j+1}(m)}(x_{k_i,i}))$ est extraite de $(f_{\psi_{j+}(m)}(x_{k_i,i}))$ donc converge vers $a_{k_i,i}$.

Pour un dyadique de génération n_0+j+1 de la forme $\frac{k}{2^{n_0+j+1}}$ on pose $b_{k,j+1} =: a_{k,j+1}$.

3. Fixer $\varepsilon > 0$ puis ρ tel que $|x-y| < \rho \Rightarrow \forall\, m\ |f_m(x) - f_m(y)| < \varepsilon$ puis choisir N tel que $2^{-N} < \rho$.

Il existe m_{j+1} tel que pour tout $m \geq m_{j+1}$ et pour tout dyadique $x_{k_i,i}$ de génération $n_0 + i \leq n_0 + j + 1$,

$$|f_{\psi_{j+1}(m)}(x_{k_i,i}) - a_{k_i,i}| < 3^{-n_0-j-1}.$$

Quitte à choisir m_{j+1} suffisamment grand on peut supposer que $\psi_{j+1}(m_{j+1}) > \psi(j)$.

• *Étape 4* : fin de la démonstration. Convergence uniforme de $(f_{\psi(j)})$.
Soit x dans $[0,1]$. Soient $j \leq i$ deux entiers.

$$\begin{aligned} |f_{\psi(j)}(x) - f_{\psi(i)}(x)| &\leq |f_{\psi(j)}(x) - f_{\psi(j)}(x_{k_j,j})| + |f_{\psi(i)}(x_{k_j,j}) - f_{\psi(i)}(x_{k_j,j})| + |f_{\psi(i)}(x) - f_{\psi(i)}(x_{k_j,j})| \\ &\leq \omega_{n_0+j} + 2.3^{-n_0-j} + \omega_{n_0+j}, \end{aligned}$$

si $x_{k_j,j}$ est un des (deux ou trois) points dyadiques de génération $\leq n_0 + j$ situé à une distance inférieure à 2^{-n_0-j}. Les majorations des termes 1 et 3 sont dues à l'équicontinuité, la majoration du terme 2 suit de (2.5).

Pour $\varepsilon > 0$, en choisissant j suffisamment grand (*i.e.*, $j \geq J$) on a bien $|f_{\psi(j)}(x) - f_{\psi(i)}(x)| < \varepsilon$, ce qui donne

$$\forall\, i, j \geq J,\ ||f_{\psi(j)} - f_{\psi(i)}||_\infty < \varepsilon.$$

Cela achève la preuve de la convergence.

□

2.5 EVN complets : espaces de Banach

2.5.1 Définition, exemples et une description

Définition 2.5.1. *Un evn complet s'appelle un espace de Banach.*

Théorème 2.5.2. *Tout evn de dimension finie est un Banach.*

Démonstration. Il n'est pas nécessaire de préciser pour quelle norme puisqu'elles sont équivalentes. Pour montrer qu'un espace de dimension finie est complet, il suffit de constater qu'une suite de Cauchy est bornée, donc admet au moins une valeur d'adhérence donc converge. □

$(\mathcal{C}^0([0,1]), ||\ ||_\infty)$ est un Banach

Soit (f_n) une suite de Cauchy pour $(\mathcal{C}^0([0,1]), ||||_\infty)$. Pour x dans $[0,1]$ la suite numérique $(f_n(x))$ est donc de Cauchy. Elle converge vers une valeur limite notée $f(x)$. On a donc une suite (f_n) d'applications continues qui converge uniformément vers une application f. On sait alors que f est continue.

$(\mathcal{C}^{0+1}([0,1]), ||\ ||_{Lip})$ est un Banach

Soit (f_n) une suite d'applications Lipschitz qui est de Cauchy pour la norme $||\ ||_{Lip}$. Elle est donc de Cauchy pour $||\ ||_\infty$ donc la suite converge vers une application f qui est continue.

Si ε est fixé, la condition de Cauchy entraine

$$\exists N,\ \forall x \forall y \forall n, p \geq N\ |f_n(x) - f_n(y) + f_p(y) - f_p(x)| \leq \varepsilon |x - y|.$$

L'inégalité triangulaire permet alors d'obtenir $|f_p(x) - f_p(y)| \leq C_{f_n}|x-y| + \varepsilon|x-y|$. En faisant $p \to +\infty$ on montre que f est aussi Lipschitz. Cela permet de passer à la limite dans $|f_n - f_p|_{Lip}$ et montre que la convergence est dans Lip.

Exercice 5
Montrer que l^p est complet.

Fermetures des sous-espaces vectoriels

Proposition 2.5.3. *Soient $(E, ||\ ||)$ un Banach et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F est fermé.*

Démonstration. On considère une suite (x_n) dans F qui converge. On note l sa limite. La suite est donc de Cauchy. On choisit une base finie $e_1, \ldots e_p$ de F et on considère la norme $||\ |L_\infty$ dans F. Toutes les normes sont équivalentes dans F donc la suite (x_n) est également de Cauchy pour $||\ ||_8$. Elle converge donc pour $||\ ||_\infty$ vers une limite l' qui est dans F. L'équivalence des normes (à nouveau) montre (x_n) converge vers l' pour la norme $||\ ||$ donc $l = l'$ et l est dans F. □

Remarque 4. On remarquera que le résultat est encore vrai si on ne suppose pas que E est complet. Ce que nous utilisons c'est d'une part qu'une suite convergente et de Cauchy (toujours vrai même sans l'hypothèse de complétude) et l'équivalence des normes en dimension finie (toujours vraie également). Ainsi un sous-espace de dimension finie dans un evn est nécessairement complet et fermé. ■

Une application de Baire

Proposition 2.5.4. *Un Banach qui n'est pas de dimension finie est de dimension infinie non dénombrable.*

Démonstration. Nous montrons par l'absurde qu'un Banach ne peut pas être de dimension infinie dénombrable.
Si on se donne une base (dénombrable et de vecteurs unitaires) $(e_1, e_2, \ldots)$ de E, on appelle E_n l'espace engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$. C'est un sous-espace de dimension n donc c'est un fermé de E. Montrons que son intérieur $\overset{\circ}{E_n}$ est vide. Si tel n'étais pas le cas, il existerait une boule $B(x, \varepsilon)$ incluse dans E_n. En particulier le vecteur $x + \frac{\varepsilon}{2}.e_{n+1}$ serait dans cette boule, et comme x est combinaison linéaire des e_i pour $1 \leq i \leq n$, tout comme n'importe quel vecteur de E_n, on arriverait à prouver que e_{n+1} serait lui aussi combinaison linéaire des e_i, avec $1 \leq i \leq n$, ce qui contredirait le fait que les e_i forment une base de E. Ainsi E_n est bien d'intérieur vide donc son complémentaire $F_n = E \setminus E_n$ est un ouvert dense dans E. Par conséquent l'intersection des F_n est dense, ce qui revient à dire que l'intérieur de la réunion des E_n est vide. Or par définition, $E = \bigcup_n E_n$ ce qui est absurde. □

2.5.2 Théorème de Stone-Weirstrass

Théorème 2.5.5. *Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Alors il existe une famille de polynômes qui converge uniformément vers f.*

Remarque 5. En d'autres termes on dit que l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. ■

Démonstration. Il existe plusieurs preuves de ce théorème. On en trouvera une très générale dans le livre de Dixmier *Topologie générale*. Il existe une très jolie preuve qui utilise les polynômes de Bernstein et découle de la linéarité de la variance pour des variables aléatoires indépendantes.

Nous donnons ici une preuve qui a été donnée en exercice (TD1).

On considère une suite (K_n) d'applications continues positives et nulles en dehors de $[-1,1]$ vérifiant

(i) Pour tout n, $\int_{\mathbb{R}} K_n(x)dx = 1$,

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\delta > 0$ il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} K_n(t)dt \leq \varepsilon.$$

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose

$$f * K_n(x) = \int_0^1 f(t)K_n(x-t)dt.$$

Le changement de variable $u = x - t$ $f * K_n(x) = \int_{x-1}^{x} f(x-u)K_n(u)du$. Pour simplifier les écritures et les calculs on prolonge f par 0 en dehors de $[0,1]$ et K_n par 0 en dehors de $[-1,1]$. Les intégrales sont donc calculées sur $\mathbb{R}$ mais en réalité elles n'ont une contribution non nulle que sur des intervalles bornés.

Soit $\varepsilon > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(x) - f * K_n(x) &= f(x).1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)K_n(u)du \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(u)du - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)K_n(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(u)\left(f(x) - f(x-u)\right)du \\
&= \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} K_n(u)(f(x) - f(x-u))du + \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u)(f(x) - f(x-u))du.
\end{aligned}$$

La fonction f est continue sur un compact donc uniformément continue. Il existe $\delta > 0$ tel que $|y - z| \leq \delta$ entraine $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. On se fixe un tel δ. La fonction f est continue donc bornée (par M). Ainsi le premier terme de droite dans la dernière égalité est majoré en valeur absolu par

$$2M.\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} K_n(u)du$$

qui peut-être rendu plus petit que ε si n est suffisamment grand (*i.e.*, $n \geq N$). Notons que dans ce cas, le second terme à droite dans la dernière égalité est majoré en valeur absolue par ε puisque $1-\varepsilon \leq \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u)du \leq 1$. Ainsi, $|f(x) - f * K_n(x)| < 2\varepsilon$ pour tout x et pour tout $n \geq N$. Cela prouve que $f * K_n$ converge uniformément vers f.

Si on choisit $K_n(x) = a_n(1-x^2)^n$ sur $[-1, 1]$, $K_n \equiv 0$ en dehors de cet intervalle, et a_n tel que $\int_{-1}^{1} K_n(t)dt = 1$, alors chaque K_n est un polynôme et donc un calcul direct montre que $f * K_n(x)$ est un polynôme en x.

On laisse en exercice la démonstration du fait que ces K_n vérifient l'hypothèse (ii) demandée en début de démonstration [4].

□

Remarque 6. Le théorème montre qu'un sous-espace vectoriel de dimension infinie n'est pas nécessairement fermé dans un Banach. ■

2.5.3 Séries et critère de Cauchy.

Pour une suite (u_n) à valeurs dans l'espace E, on dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si la suite définie par

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

converge. On dit que la série converge absolument si la série réelle $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ converge. Dans un Banach on peut utiliser le critère de Cauchy pour confirmer ou infirmer la convergence d'une suite ; Cela a donc une conséquence pratique pour les séries :
Si (u_n) est à valeurs dans un Banach, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon,\ \exists N\ \forall n \geq N, \forall p \geq 0, \|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\| < \varepsilon.$$

Théorème 2.5.6. *Une série à valeurs dans un Banach qui est absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \|u_k\|.$$

□

On peut trouver des contre-exemples : la suite définie par $u_n = f_{n+1} - f_n$, où les f_k sont celles du premier exemple du chapite, ne peut pas donner une série convergente car cela équivaudrait à la convergence de la suite (f_n). Par ailleurs la série est absolument convergente car $\|u_n\| \sim \frac{1}{n^2}$.

---

4. On montre que $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n dx \geq e^{-2}/\sqrt{n}$ si n est assez grand. Donc a_n est au moins en $Cn^{-1/2}$. Par ailleurs $\int_{\delta}^{1} (1-x^2)^n dx \leq (1-\delta^2)^n$ qui est exponentiellement petit.

Application : exponentielle de matrice.

On choisit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle. On pose

$$e^A \overset{déf}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Cette série converge car elle est absolument convergent et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un Banach (car de dimension finie). On a en effet $\sum \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$.
Ceci permet de résoudre des systèmes différentiels :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

où A est une matrice $n \times n$. Les solutions sont du type $Y(t) = e^{t.A} \times Y_0$.

Chapitre 3

Espaces de Hilbert

Ce chapitre est très fortement inspiré de Brézis *Analyse Fonctionnelle*.

3.1 Définition. Projection sur un convexe fermé

3.1.1 Produit scalaire et norme

Si H est un $\mathbb{R}$-ev, on rappelle qu'un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire symétrique positive et définie :

1. $u \mapsto (u, v)$ et $v \mapsto (u, v)$ sont linéaires.
2. $(u, v) = (v, u)$.
3. $(u, u) \geq 0$.
4. $(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Exemples 7.

Dans $\mathbb{R}^2$, si on écrit $x = (x_1, x_2)$, la forme définie par $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ est une forme bilinéaire définie positive et symétrique.

Dans $\mathbb{C}^0([0,1])$ $(f, g) := \int f(t)g(t)dt$ est une forme bilinéaire définie positive et symétrique.

Remarque 7. Dans toute la suite, les résultats seront énoncés dans le cas réel. Ils s'étendent cependant sans aucun problème au cas complexe en considérant une forme sesquilinéaire (forme hermitienne). ■

Lemme 3.1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tout u, v dans H,*

$$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)}\sqrt{(v, v)}.$$

Démonstration. On fixe u et v et on considère un paramètre réel t. Alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u + tv, u + tv) \\ &= (u, u) + 2t(u, v) + t^2(v, v). \end{aligned}$$

Nous obtenons un polynôme en t du second degré qui est toujours positif donc son discriminent est négatif ou nul. C'est à dire

$$(u, v)^2 \leq (u, u)(v, v).$$

□

Le produit scalaire permet de définir *la norme associée* en posant

$$|u| = \sqrt{(u,u)}.$$

Il s'agit bien d'une norme : comme le produit scalaire est positif alors $|u|$ est bien définie. Par ailleurs le produit scalaire est défini donc $|u| = 0$ signifie $u = 0$. Enfin, la bilinéarité donne $|\lambda u| = |\lambda||u|$. Il ne reste plus qu'à vérifier l'inégalité triangulaire. Elle utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(u,v) \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v| = (|u| + |v|)^2.$$

Un produit scalaire vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2). \tag{3.1}$$

Exercice 6
Faire la preuve de (3.1).

Définition 3.1.2. *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u,v) tel que l'espace vectoriel normé (pour la norme associée) soit complet.*

Exemple 8. $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien est un espace de Hilbert.

3.1.2 Un exemple plus compliqué : l'espace l^2

L'espace est un espace de Hilbert

On considère l'espace l^2 des suites réelles $\underline{u} = (u_n)$ vérifiant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

On pose donc $(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. L'inégalité de Hölder montre que la série est bien convergente. Cela définit un produit scalaire sur l^2 et la norme $|| \, ||_2$ en est issue.

Il reste à démontrer que l'espace est complet.

Considérons donc une suite $(\underline{x}_m)_m$ de Cauchy. Chaque terme $\underline{x}_m$ est une suite $(x_{m,n})_n$. L'inégalité

$$|x_{m,n} - x_{p,n}|^2 \leq \sum_j |x_{m,j} - x_{p,j}|^2$$

montre que pour chaque n, la suite $(x_{m,n})_m$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$). Elle converge donc. On note y_n sa limite et $\underline{y}$ la suite ainsi obtenue.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit N tel que pour tout $m, p \geq N$, $||\underline{x}_m - \underline{x}_p||_2 < \varepsilon$. Soit n un entier. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} |x_{m,j} - x_{p,j}|^2 &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} |x_{m,j} - x_{p,j}|^2 < \varepsilon^2 \\
&\text{en faisant } p \to +\infty \\
\sum_{j=0}^{n} |x_{m,j} - y_j|^2 &\leq \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vrai pour tout n, donc si on fait $n \to +\infty$ on trouve

$$||\underline{x}_m - \underline{y}||_2 \leq \varepsilon$$

dès que $m \geq N$. Cela montre que la suite converge vers $\underline{y}$. Enfin, la suite est de Cauchy, donc bornée. L'inégalité

$$\sum_{j=0}^{n} |x_{m,j}|^2 \leq ||\underline{x}_m||_2^2$$

montre que $\underline{y}$ est également dans l^2.

Base hilbertienne

Dans l^2 on note $\underline{e}_n$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut 1. On remarque (on rendra cette écriture plus rigoureuse à la fin du chapitre) que la suite $\underline{u} = (u_n)$ s'écrit aussi

$$\underline{u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \underline{e}_n = \sum_n (\underline{u}, \underline{e}_n)\underline{e}_n.$$

Dans toute la suite H sera un espace de Hilbert, (u, v) le produit scalaire qui le définit et $|u|$ la norme associée.

3.1.3 Projection sur un convexe fermé

Commençons par un résultat technique :

Lemme 3.1.3. *Si u est un point de H, alors $x \mapsto |u - x|$ est continue. Elle est même 1-Lipschitz.*

Démonstration. L'inégalité triangulaire donne $|u - x| \leq |u - y| + |y - x|$, ce qui s'écrit

$$|u - x| - |u - y| \leq |x - y|.$$

En échangeant x et y on obtient $|u - y| - |u - x| \leq |x - y|$ et donc

$$||u - x| - |u - y|| \leq |x - y|.$$

□

Définition 3.1.4. *Une partie $A \subset H$ est dite convexe si pour tout u et v dans A et pour tout $t \in [0, 1]$, $tu + (1 - t)v$ est encore dans A.*

Exemple 9. Une boule (fermée ou ouverte) est convexe.

Lemme 3.1.5. *Un sous-espace vectoriel est convexe.*

Théorème 3.1.6. *Soit $K \subset H$ un convexe fermé (non vide). Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que*

$$|x - u| = \min_{v \in K} |x - v|.$$

De plus u est caractérisé par $u \in K$ et pour tout v dans K,

$$(x - u, v - u) \leq 0.$$

Démonstration. Soit (v_n) une suite d'éléments de K qui telle que $d_n := |x - v_n|$ tende vers $d := d(x, K) = \inf_{v \in K} |x - v|$. On montre que la suite est de Cauchy.

Si on applique l'identité du parallélogramme avec $a = x - v_n$ et $b = x - v_m$ on obtient

$$\left| x - \frac{v_n + v_m}{2} \right|^2 + \left| \frac{v_n - v_m}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Comme $\frac{v_n + v_m}{2}$ est dans K, $\left| x - \frac{v_n + v_m}{2} \right|$ est plus grand que d, ce qui entraine

$$|v_n - v_m|^2 \leq 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2.$$

Si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe N tel que pour tout $p \geq N$, $0 \leq d_p - d < \varepsilon$. Si n et m sont supérieurs à N, on a donc $|v_n - v_m| \leq C.\varepsilon$ ce qui montre que la suite (v_n) est bien de Cauchy. Comme l'espace est complet elle converge. On note u sa limite et le lemme 3.1.3 permet d'avoir

$$|u - x| = d.$$

Si v est un point quelconque de K et t dans $[0, 1]$, $tv + (1 - t)u = u + t(v - u)$ est dans K. Donc $|x - (tv + (1 - t)u)|^2 \geq d^2$, ce qui donne

$$\begin{aligned} d^2 \leq |x - u|^2 - 2t(x - u, v - u) + t^2|v - u|^2 &= d^2 - 2t(x - u, v - u) + t^2|v - u|^2 \\ \textit{i.e.},\ 0 &\leq -2t(x - u, v - u) + t^2|v - u|^2. \end{aligned}$$

Lorsque t tend vers 0, le terme dominant est $-2t(x - u, v - u)$ qui doit être positif ou nul, d'où

$$(x - u, v - u) \leq 0.$$

Enfin on a

$$0 \geq (x - u, v - u) = (x - v, v - u) + |v - u|^2 = -(x - v, u - v) + |v - u|^2.$$

Si v est un autre point minimisant, le terme de droite est positif donc doit être nul, ce qui donne bien $u = v$.

Réciproquement, si $u \in K$ vérifie pour tout v, $(x - u, v - u) \leq 0$ alors

$$\begin{aligned} |x - v|^2 &= |x - u + u - v|^2 \\ &= |x - u|^2 + 2(x - u, u - v) + |u - v|^2 \geq |x - u|^2 \end{aligned}$$

car les 2 termes suivant à droite sont positifs. □

Définition 3.1.7. *Avec les notations précédentes, on définit la projection de x sur K, par $u = P_K(x)$.*

Remarque 8. Si x est dans K, l'unicité donne $P_K(x) = x$. ■

Exercice 7

Montrer que P_K est 1-Lipschitzienne. Montrer que 1 est la meilleure constante de Lipschitz possible.

Proposition 3.1.8. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé dans H alors P_F est un opérateur linéaire. De plus $P_F(x)$ est caractérisé par*

$$P_F(x) \in H \text{ et } \forall v \in H,\ (x - P_F(x), v) = 0.$$

Démonstration. Nous avons vu qu'un sous-espace vectoriel est convexe. Si v est dans F et t dans $\mathbb{R}$, on doit donc avoir

$$0 \geq (x - P_F(x), tv - P_F(x)) = t(x - P_F(x), v) - (x - P_F(x), P_F(x)).$$

Cette inégalité est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et elle entraine $(x - P_H(x), v) = 0$.

Réciproquement, pour v dans F,

$$|x-v|^2 = |x-P_F(x)+P_F(x)-v|^2 = |x-P_F(x)|^2+2(x-P_F(x), P_F(x)-v)+|P_F(x)-v|^2 = |x-P_F(x)|^2+|P_F($$

Il s'agit de l'égalité de Pythagore qui permet de voir que $(x - y, v) = 0$ pour tout v dans F signifie que y réaliste la distance minimale, *i.e.*, $y = P_F(x)$.

Il reste maintenant à voir que P_F est linéaire. On a déjà (Rem. 8) que $P_F \circ P_F = P_F$. Il reste à vérifier la linéarité.

Soient $y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit v dans H. Alors $P_F(x) + \lambda P_F(y)$ est dans F (stabilité par combinaison linéaire) et on a

$$(x + \lambda y - P_F(x) - \lambda P_F(y), v) = (x - P_F(x), v) + \lambda^2(y - P_F(y), v) = 0 + 0 = 0,$$

ce qui montre l'égalité $P_F(x + \lambda y) = P_F(x) + \lambda P_F(y)$. □

3.2 Dual topologique d'un espace de Hilbert

Théorème 3.2.1 (Riesz-Fréchet)**.** *Soit ϕ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\phi(x) = (f, x).$$

Démonstration. Si ϕ est la forme nulle, on choisit $f = 0$. Sinon, posons $F = \ker \phi$. Il s'agit d'un hyperplan (noyau d'une forme linéaire), fermé puisque ϕ est continue. Si y vérifie $\phi(y) \neq 0$, on pose $u = y - P_F(y)$. Par construction, pour tout x de F,

$$(u, x) = 0 = \phi(x).$$

D'autre part $(u, y) = (u, y - P_F(y)) + (u, P_F(y)) = |y - P_F(y)|^2 + 0$ par définition de u et de $P_F(y)$. Comme y n'est pas dans F, $y \neq P_F(y)$ et donc $(u, y) \neq 0$.

Pour t est dans $\mathbb{R}$, on a $(tu, y) = t(u, y) = \phi(y)$ si l'on pose $t = \dfrac{\phi(y)}{(u, y)}$. Pour ce t, on pose $f = t.u$. Nous venons donc de voir que l'égalité

$$\phi(x) = (f, x)$$

a lieu pour tout x dans F et aussi pour $x = y$.

Si x est dans $H \setminus F$, on pose $\lambda = \dfrac{\phi(x)}{\phi(y)}$. Alors $\phi(x) = \lambda\phi(y)$ et donc $x - \lambda y$ est dans F. Ainsi,

$$x = \lambda y + x - \lambda y.$$

Cela donne $(f, x) = (f, \lambda y) + (f, x - \lambda y) = \lambda(f, y) = \lambda\phi(y) = \phi(x)$. □

3.3 Base Hilbertienne

3.3.1 Rappels sur l'orthonormalisation

On rappelle que dans un espace-vectoriel, une base est une famille libre génératrice. Elle est dite *orthogonale* si les vectuers de la base sont deux à deux orthogonaux. Elle est dite *normée* si tous les vecteurs sont de norme 1.

Théorème 3.3.1 (Gram-Schmidt)**.** *Si $F \subset H$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors il existe une base orthonormée de F.*

Démonstration. La preuve se fait en construisant par récurrence une famille libre orthonormée. Lorsque le cardinal de la famille est la dimension de F, il s'agit d'une base.

La construction par récurrence utilise la projection orthogonale qui est ici égale à la projection sur le convexe fermé qu'est l'espace construit à l'étape précédente.

L'amorce se fait en choisissant un vecteur non nul dans F et en le normalisant (en le divisant par sa norme). Cela donne un vecteur e_1. Si on a construit n vecteurs normés et deux à deux orthogonaux dans F, $e_1, \ldots, e_n$ on pose $E_n := Vect(e_1, \ldots, e_n) \subset F$. Si l'inclusion est stricte on choisit $f \notin E_n$ dans F et on pose

$$e_{n+1} := \frac{f - P_{E_n}(f)}{|f - P_{E_n}(f)|}.$$

Par construction, il est normé et orthogonal à tout vecteur de E_n donc aux e_i pour $i \leq n$. □

3.3.2 Base hilbertienne

Définition 3.3.2. *Soit (E_n) une suite de sous-espaces fermés de H. On dit que H est égal à la somme vectoriel des (E_n) et on note $H = \oplus_n E_n$ si les E_n sont deux à deux orthogonaux et l'espace vectoriel engendré par l'union des E_n est dense dans H.*

Il convient de rappeler que l'espace vectoriel engendré par une famille quelconques de vecteurs $(e_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de la famille.

Théorème 3.3.3. *On suppose que H est égal à la somme vectoriel des (E_n). Soient u dans H et $u_n := P_{E_n}(u)$. Alors,*

1. $u = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j$ i.e., $u = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n} u_j$.
2. *On a l'égalité de Bessel-Parseval :* $|u|^2 = \sum_j |u_j|^2$.

Réciproquement, si (u_n) est une suite de H telle que chaque u_n est dans E_n et $\sum_n |u_n|^2 < +\infty$, alors la série $\sum_n u_n$ converge (dans H) vers un élément u et $P_{E_n}(u) = u_n$ pour chaque n.

Démonstration. Commençons par quelques résultats intermédiaires.

On pose $P_k := \sum_{n \leq k} P_{E_n}$. Rappelons que $P_{E_n}(x)$ est caractérisé par

$$P_{E_n}(x) \in E_n, \ \forall v \in E_n \ (x - P_{E_n}(x), v) = 0.$$

Comme les E_n sont deux à deux orthogonaux, si v est dans E_n et w dans E_m $m \neq n$, alors

$$(v, w) = 0.$$

Ainsi, $(P_{E_n}(x), w) = 0$ et donc $P_{E_m} \circ P_{E_n}(x) = 0$.

De plus $P_{E_n}(P_{E_n}(x)) = P_{E_n}(x)$. Ces égalités montrent que P_k est un projecteur : P_k est linéaire et $P_k \circ P_k = P_k$. Son image est $F_k := \oplus_{n \leq k} E_n$.

Chaque P_{E_n} est Lipschitz, donc P_k est continue.

Nous affirmons que pour tout v dans F_k et pour tout x dans H,

$$|x - P_k(x)|^2 + |P_k(x) - v|^2 = |x - v|^2. \tag{3.2}$$

Il s'agit juste du théorème de Pythagore et il est une conséquence directe du fait que P_k est la projection orthogonale sur F_k. Cela entraine

$$|x - P_k(x)| \leq |x - v|, \ \forall v \in F_k. \tag{3.3}$$

Enfin, si (v_m) est une suite de vecteurs dans $Vect\{\bigcup_n E_n\}$ qui converge vers un point $x \in H$ et, si on définit $(k(m))$ le plus petit entier k tel que v_m appartienne à F_k, alors la suite $k(m)$ est bornée si et seulement si x est dans l'un des F_k (ici on utilise que les F_k sont fermés).

Comme les vecteurs u_n sont deux à deux orthogonaux, on a

$$|P_k(u)|^2 = (P_k(u), P_k(u)) = \sum_{n=1}^{k} |u_n|^2. \tag{3.4}$$

D'autre part, par définition de u_n, $(u, u_n) = (u - u_n + u_n, u_n) = |u_n|^2$. En sommant sur n on trouve

$$(u, P_k(u)) = \sum_{n=1}^{k} |u_n|^2 = |P_k(u)|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$|P_k(u)| \leq |u| \tag{3.5}$$

(qui est vraie pour tout u). Supposons que (v_m) dans $Vect\{\bigcup_n E_n\}$ converge vers u. Si $\varepsilon > 0$ est fixé, on a $|u - v_m| < \varepsilon$.

Par ailleurs, pour tout $k \geq k(m)$, $P_k(v_m) = v_m$ puisque v_m est dans $\oplus_{n \leq k} E_n$. Ainsi (3.5) appliquée à $u - v_m$ donne

$$|P_k(u) - v_m| = |P_k(u) - P_k(v_m)| \leq |u - v_m| < \varepsilon,$$

et donc

$$|u - P_k(u)| \leq |u - v_m| + |v_m - P_k(u)| < 2\varepsilon.$$

Ceci montre bien $u = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n$. Ensuite, (3.4) montre l'égalité de Parseval en faisant $k \to +\infty$. $\square$

Définition 3.3.4. *On dit que H admet une base hilbertienne s'il existe une famille de vecteurs (e_n) orthonormées telle que le sous-espace engendré par ces vecteurs soit dense dans H.*

Théorème 3.3.5. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. Nous rappelons qu'un espace est dit séparable s'il existe une famille dénombrable et dense. Soit donc (f_n) dénombrable (*i.e.*, $n \in /N$) et dense. On note E_n l'espace engendré par $e_1, \ldots, e_n$. Le principe d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire une famille dénombrable de vecteurs e_n, deux à deux orthogonaux et normés tels que pour tout n, base de E_n. Alors les (e_n) forment une base hilbertienne. □

Exemple 10. La suite des vecteurs $\underline{e}_n$ construite pour l^2 est une base hilbertienne.

3.3.3 Compléments, avertissement, exemples

Compléments

Si H admet une base hilbertienne dénombrable, (e_n) on a donc pour tout x dans H,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} (x, e_n) e_n,$$

au sens où $\lim_{k \to +\infty} |x - \sum_{n=0}^{k} (x, e_n) e_n| = 0$. En outre

$$|x|^2 = \sum_n (x, e_n)^2.$$

Il est important de bien noter qu'une base hilbertienne n'est pas une base au sens de l'espace vectoriel. Comme nous l'avons rappelé, une base au sens vectoriel signifie qu'on ne regarde que les combinaisons linéaires finies de ces vecteurs. Une base hilbertienne signifie qu'on regarde des combinaisons linéaires infinies (donc des limites).

Une base hilbertienne est à une base vectorielle ce que sont les séries entières aux polynômes.

Si on ne suppose pas l'espace séparable, alors il existe encore une base hilbertienne, mais il faut pour cela utiliser la notion de famille *sommable* et le *Lemme de Zorn* . On pourra voir Rudin, analyse réelle et complexe.

Exemple : le cas Fourier

Nous avons déjà vu l'exemple de l^2.

Si $H = L^2([0, 2\pi])$ alors la famille composée des fonctions données par $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$ et $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx$ définissent une base hilbertienne. On retrouve l'analyse de Fourier et l'égalité de Parseval.

Nous avions vu que si f est $\mathcal{C}^2$, alors on a

$$f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)),$$

la convergence étant uniforme. En fait, la convergence a lieu dans L^2 pour toute fonction dans L^2, *i.e.*,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \frac{a_0(f)}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)) \right|^2 dt = 0.$$

Homéomorphismes

Il est donc assez facile de voir que tous les espaces de Hilbert séparables sont homéomorphes et même isométriques à l^2. Pour s'en convaincre, il suffit de choisir une base hilbertienne et de l'envoyée sur la base $(\underline{e}_n)$, puis de définir l'application par linéarité (et/ou continuité).

Quand-est-ce qu'un norme découle d'un produit scalaire ?

Théorème 3.3.6. *Soit H un espace vectoriel et $|\quad|$ une norme sur H vérifiant l'identité du parallélogramme*

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2).$$

Alors $|\quad|$ découle d'un produit scalaire.

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$\phi(x,y) := \frac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right)$$

définit un produit scalaire, c'est à dire une forme bilinéaire, définie positive symétrique. $\square$