Analyse 5
Licence de Mathématiques 3ème année

2019
UNC

Table des matières

Chapitre 1

Rappels sur la convergence uniforme et les intégrales

1.1 Intégrales à paramètre sur un segment-convergence uniforme

1.1.1 Rappel des théorèmes déjà vus

On considère donc $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$, continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Puis on pose

$$F(t) := \int_a^b f(x,t)dx.$$

Exemple 1. $F(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{tx} \cos x dx.$

La question est de savoir quelle régularité peut-on espérer sur F en fonction de celle de f. On rappelle que F est continue en t si pour toute suite (t_n) qui tend vers t, $F(t_n)$ tend vers $F(t)$. Ainsi on a :

contisousinte **Théorème 1.1.1.** *La fonction F est continue dès lors que f est continue.*

rem-contiinte **Remarque 1.** Ce théorème est valide que I soit borné ou non. ■

Démonstration. On se fixe $t \in I$ et $t_n \to t$. La suite converge donc elle est bornée. Pour simplifier, on suppose donc que t_n est compris dans l'intervalle $[-M, M]$ pour tout n.

On pose $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = f(x, t_n)$. La fonction f est continue sur (le compact) $[a,b] \times [-M, M]$ donc elle est uniformément continue.

Cela montre que f_n converge uniformément vers f.

Cela montre que F est continue. □

Le même principe permet d'avoir la dérivabilité de f.

usintecompact **Théorème 1.1.2.** *Supposons que $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ est de continue et telle que $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ est aussi continue. Alors F est $\mathcal{C}^1$ et*

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

Démonstration. Considérer $t_n \to t$ Poser $f_n(x) = \dfrac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}$. Utiliser le TAF pour avoir $f_n(x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t'_n)$ et utiliser la continuité uniforme de $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ pour montrer que f_n converge uniformément vers $\dfrac{\partial f}{\partial t}(.,t)$. □

1.1.2 Rappels sur la convergence uniforme

Tout d'abord, nous rappelons la notation pour $g : I \to \mathbb{R}$

$$||g||_\infty = \sup_{t \in I} |g(t)|.$$

Nous rappelons également que si g est continue et $I = [a,b]$ alors d'une part le supremum est bien défini (dans $\mathbb{R}$) et d'autre part il est atteint.

def-cv **Définition 1.1.3.** *Soit (f_n) une suite de fonctions toutes définies sur le même intervalle I. Alors on dit que f_n converge simplement vers f si pour tout $x \in I$ la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. On dit que (f_n) converge uniformément vers f si la suite numérique $||f_n - f||_\infty$ converge vers zéro.*

La convergence simple s'écrit donc :

$$\boxed{\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x,\ \exists\, N,\ \forall\, n \geq N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

Nous soulignons le fait suivant : l'entier N dépend <u>et</u> de ε <u>et</u> du point x.

La convergence uniforme s'écrit quant à elle :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall n \geq N \text{ et } \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.} \tag{1.1}$$ eq-cvunif

On rappelle que la convergence uniforme est plus forte que la convergence simple. Une suite qui converge uniformément converge simplement. La réciproque est fausse.

Le principal résultat (sur lequel on reviendra) à retenir est le suivant :

th-cvunifc0 **Théorème 1.1.4.** *Soit (f_n) une suite de fonctions (uniformément) continues qui converge uniformément vers f sur I. Alors f est (uniformément) continue.*

Par ailleurs, il existe des suites qui convergent simplement et donc la limite n'est pas continue.

1.1.3 Rappels sur l'intégrale de Riemann sur un segment

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_N = b$ tel que f soit constante sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$ de valeur b_i. On note alors

$$\int_a^b f(t)dt := \sum_{i=0}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) b_i.$$

Cela représente l'aire algébrique comprise entre le graphe de f et l'axe des abscisses.

Un calcul simple montre :

$$||f||_\infty \leq \varepsilon \Longrightarrow \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \varepsilon(b-a). \tag{1.2}$$ equ1-majoi

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite Riemann intégrable sur $[a,b]$ s'il existe deux suites de fonctions en escaliers, (ϕ_n) et $(\psi_{n)}$ telles que

$$||f-\phi_n||_\infty \leq \psi_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(t)dt = 0.$$

La valeur $\int_a^b f(t)dt$ est alors $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \phi_n(t)dt$ et on montre que cette vaeur ne dépend pas des choix des suites (ϕ_n) et (ψ_n)

h-intefcconti **Théorème 1.1.5.** *Toute fonction continue (ou même réglée) sur un segment $[a,b]$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. Une fonction continue est une limite uniforme de fonctions en escalier. On peut donc choisir les ψ constants et aussi petits que voulus. □

-intelimunnif **Corollaire 1.1.6.** *Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f* [1] *alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt.$$

Démonstration. On a en effet pour tout ε et pour tout n suffisamment grand $||f-f_n||_\infty \leq \varepsilon$ puis on utilise (1.2) equ1-majointeconstante. □

Ce qu'il faut retenir ici c'est que la construction de l'intégrale de Riemann pou rune application continue sur un segment est très étroitement liée à la convergence uniforme, à l'uniforme continuité et donc au fait que $[a,b]$ est compact.

1.2 Rappels sur les intégrales de Riemann sur un ouvert

1.2.1 Ce qui change

Passer de $[a,b]$ à $]a,b[$ introduit des modifications et des alterations de propriétés cruciales pour définir $\int_a^b f(t)dt$. Citons-en quelques-uns :

1. La fonction n'est plus nécessairement bornée. Une surface peut donc "devenir" infinie. C'est ce qu'il se passe, par exemple pour $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,1]$.
2. La fonction n'est plus nécessairement uniformément continue. Il n'est plus plus claire qu'une fonction continue soit réglée, et/ou puisse être bien approchée par des fonctions en escalier. Par exemple, $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ sur $]0,1]$.
3. De fait, l'intervalle $]a,b[$ peut ne plus être de longueur finie, et donc estimation qui faisait intervenir $(b-a)$ risque de ne pas s'adapter.

1. qui est nécessairement continue

1.2.2 Définitions et méthodologie

def-integene **Définition 1.2.1.** *Soit* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *continue. On dit que l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est impropre en* b *(resp. en* a*) si* $f(b)$ *(resp.* $f(a)$*) n'est pas défini.*

Si l'intégrale est impropre en b*, on dit que* $\displaystyle\int^b f(t)dt$ *converge en* b *si pour tout* c *et* d *dans* $]a,b[$*,* $\displaystyle\lim_{d\to b}\int_c^d f(t)dt$ *existe. On note alors cette limite* $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$*. Si l'intégrale ne converge pas on dit qu'elle diverge.*

Si l'intégrale est impropre en a*, on dit que* $\displaystyle\int_a f(t)dt$ *converge en* a *si pour tout* c *et* d *dans* $]a,b[$*,* $\displaystyle\lim_{c\to a}\int_c^d f(t)dt$ *existe. Dans ce cas on note* $\displaystyle\int_a^d f(t)dt$ *cette limite. Si l'intégrale ne converge pas on dit qu'elle diverge.*

Si l'intégrale est impropre en a *et* b*, on dit qu'elle converge si elle converge en* a *et en* b*. On note alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^e f(t)dt + \int_e^b f(t)dt.$$

Sinon on dit qu'elle diverge.

-noteintegene **Remarque 2.** La relation de Chasle montre que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas du choix de e.
■

La **méthodologie** est donc la suivante :

1. On identifie les bornes qui rendent l'intégrale impropre.
2. On traite chaque borne **indépendamment** des éventuelles autres bornes.
3. L'intégrale converge si et seulement si elle converge pour chaque borne.

1.2.3 Absolue convergence et critère de Cauchy

ef-absocvinte **Définition 1.2.2.** *On dit que l'intégrale impropre* $\displaystyle\int^b f(t)dt$ *est absolument convergente si l'intégrale impropre* $\displaystyle\int^b |f(t)|dt$ *est convergente.*

On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int^b f(t)dt$ *vérifie le critère de Cauchy (en* b*) si pour tout* ε*, il existe un voisinage de* b *tel que pour tout* c *et* d *dans ce voisinage,*

$$\left|\int_c^d f(t)dt\right| < \varepsilon.$$

th-cauchyinte **Théorème 1.2.3** (Critère de Cauchy)**.** *L'intégrale* $\displaystyle\int^b f(t)dt$ *est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy. Une intégrale impropre absolument convergente est convergente.*

integeneborne **Remarque 3.** On remarque (et on comprend) que l'éventuelle borne du bas dans $\int_y^d f(t)dt$ ne joue aucun rôle. C'est la même chose que pour une série, la convergence se voit sur la queue. L'équivalent de la queue ici, est $\int^b f(t)dt$. ■

Il faut évidemment rapprocher le critère d'absolue convergence avec le même résultat pour les séries numériques. Tout comme les séries numériques, il existe des intégrales convergentes qui ne sont pas convergentes. On en donnera un exemple plus loin.

1.2.4 Méthodes pour établir la convergence

Critère sur la limite des primitives

Soit f continue sur $]a, b[$ et F une primitive de f sur ce même intervalle. Pour tout $a < c < d < b$ on a

$$\int_c^d f(t)dt = F(d) - F(c).$$

Ceci permet donc de montrer le résultat suivant :

th-cvprimi **Théorème 1.2.4.** *Si $\int_a^b f(t)dt$ est impropre en b (resp. en a) alors elle converge si et seulement si toute (il suffit d'une) primitive F de f sur $]a, b[$ admet une limite en b (resp. en a).*

Une ré-écriture de la convergence $d \to b$ permet d'avoir

p-intecvsuite **Proposition 1.2.5.** *L'intégrale $\int^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si pour toute suite $b_n \to_{n\to+\infty b}$, et pour tout $c \in]a, b[$, $\lim_{n\to+\infty} \int_c^{b_n} f(t)dt$ existe. Celle limite est alors $\int_c^b f(t)dt$.*

Méthodes similaires aux séries

Tout comme pour les séries, il est souvent difficile de montrer qu'une intégrale est convergente sans être absolue convergente. Les méthodes pour établir la convergence ou la divergence d'une intégrale ne sont donc valides que pour des fonctions de signe constant.

Domination

Le principe est le même que pour les séries. On va dominer une fonction positive f par une autre fonction positive g. Alors si l'intégrale de la grande est convergente, l'intégrale de la petite l'est. Inversement, si l'intégrale d ela petite est divergente, alors l'intégrale de la grande l'est également.

th-cvdominte **Théorème 1.2.6.** *Soient f et g deux fonctions définies sur $]a, b[$ et positives au voisinage de b. On suppose que pour tout t sur un voisinage de b,*

$$f(t) \leq g(t).$$

Si $\int^b g(t)dt$ *converge, alors* $\int^b f(t)dt$ *converge. Si* $\int^b f(t)dt$ *diverge, alors* $\int^b g(t)dt$ *diverge.*

Exemples 2.
• C'est une technique très pratique pour se débarrasser d'un sin ou d'un cos. Par exemple pour $t > 1$, $0 \leq \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$. Comme $\int^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge, on en déduit que $\int^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^2}dt$ converge ; puis que $\int^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}dt$ est (absolument) convergente.
• De la même manière, pour $0 < a < 1$, et pour x suffisamment grand

$$\frac{1}{x^a \ln^2(x)} > \frac{1}{x^{a+\varepsilon}},$$

pour n'importe quel $\varepsilon > 0$ petit (de telle sorte que $a+\varepsilon$ reste < 1). Comme $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{a+\varepsilon}}dx$ diverge, $\int^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^2(x)}dx$ converge.

Équivalents

Le théorème th-cvdominte 1.2.6 montre immédiatement le résultat suivant :

op-oOintegene **Proposition 1.2.7.** *Soient f et g deux fonctions* **positives**. *On suppose que* $\int^b f(t)dt$ *et* $\int^b g(t)dt$ *sont impropres en b. Alors*

1. *Si $f = O(g)$ au voisinage de b,*
   (a) *si* $\int^b g(t)dt$ *converge alors* $\int^b f(t)dt$ *converge.*
   (b) *Si* $\int^b f(t)dt$ *diverge alors* $\int^b gt)dt$ *diverge.*
2. *Si $f = o(g)$ au voisinage de b et si* $\int^b g(t)dt$ *converge alors* $\int^b f(t)dt$ *converge.*

-equiintegene **Théorème 1.2.8.** *Soient f et g deux fonctions positives équivalentes au voisinage de b. On suppose que* $\int^b f(t)dt$ *est impropre en b. Alors* $\int^b g(t)dt$ *est impropre en b. De plus,* $\int^b f(t)dt$ *et* $\int^b g(t)dt$ *sont de même nature*[2].

1.2.5 Méthodes d'études propres aux intégrales

Pour calculer les intégrales il y a trois façons connues. Un calcul direct via une primitive. L'intégration par partie et le changement de variable. Nous avons déjà vu comment la convergence d'une intégrale impropre se traduit sur les primitives. Explorons maintenant les deux autres méthodes.

2. ce qui signifie qu'elles sont soit toutes les deux divergentes soit toutes les deux convergentes

Intégration par partie

Un calcul direct d'intégration par partie ne peut pas se faire. En effet un calcul direct donne

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt. \tag{1.3}$$

equ1-ippgen

Si l'intégrale de gauche est impropre en b, cela signifie que $f'(b)g(b)$ n'est pas défini. Il est alors très probable qu'au moins un des termes $f(b)g(b)$ ou $f(b)g'(b)$ ne soit pas défini. C'est par exemple évidemment le cas si $b = +\infty$. Alors, la formule (1.3) signifie qu'une limite (à gauche) vaut la différence de deux limites (à droite). La même chose se passe si l'intégrale est impropre en a.

Or, on sait qu'une la différence de deux suites (pour faire simple) divergente peut être convergente. En d'autre termes, la convergence de l'intégrale de gauche ne permet pas de garantir que les deux limites (en b) de droite existent. L'intégration par partie doit donc se faire en vérifiant que chaque limite existe.

Méthode Supposons que l'intégrale $\int_c^b f'(t)g(t)dt$ est impropre en b. On choisit $B < b$ et on écrit

$$\int_c^B f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_c^B - \int_c^B f(t)g'(t)dt. \tag{1.4}$$

equ2-ippgen

Si $\lim_{B\to b} f(B)g(B)$ existe et si $\int_c^b f(t)g'(t)dt$ est convergente (en b donc), alors $\lim_{B\to b}\int_c^B f'(t)g(t)dt$ existe comme différence de deux termes ayant une limite. En d'autres termes, $\int_c^b f'(t)g(t)dt$ est convergente et on a

$$\int_c^b f'(t)g(t)dt = \lim_{B\to b} f(B)g(B) - f(c)g(c) - \int_c^b f(t)g'(t)dt. \tag{1.5}$$

equ2-ippgen

Changement de variable

Rappelons donc la formule du changement de variable

$$\int_{u(c)}^{u(d)} f(x)dx = \int_c^d f\circ u(t)u'(t)dt.$$

Ici f est définie sur un intervalle $]a,b[$ et u est une application $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $]a,b[$.

La formule de Chasle (généralisée) montre que u n'a pas besoin d'être bijective. Nous avons d'ailleurs vu un exemple allant dans ce sens.

Pour les intégrales impropres, cette souplesse disparaît. En effet, il se peut qu'une intégrale soit convergente d'un coîté d'une singularité mais pas de l'autre côté. Or, lorsqu'on utilise la formule de Chasle en "sortant" de l'intervalle initial, on revient dedans par l'autre côté d'une singularité.

def-diffeo **Définition 1.2.9.** *On dit que u est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]c,d[$ dans $]a,b[$ (les bornes peuvent éventuellement être fermées) si u est une bijection de $]c,d[$ sur $]a,b[$, u est de classe $\mathcal{C}^1$ et la bijection réciproque u^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$.*

hgvarintegene

Théorème 1.2.10. *Soient* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *une intégrale impropre et* u *un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme de* $]c,d[$ *sur* $]a,b[$*. Alors* $\displaystyle\int_c^d f \circ u(t)u'(t)dt$ *est une intégrale impropre de même nature que* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$*.*

On retiendra : on ne change pas la nature d'une intégrale impropre en faisant un changement de variable.

Chapitre 2

Intégrales impropres à paramètre

2.1 Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

L'objectif de cette section est d'étudier la définition,la continuité et la dérivabilité de fonctions définies par des intégrales du type

$$F(x) = \int_a^{+\infty} f(t,x)dt.$$

Si on suppose $a = 0$, et en découpant l'intégrale par des tranches entières on tombe sur

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t,x)dt.$$

Dans le cours sur les séries, plusieurs types de convergences ont été vues, notamment la convergence normale : il existe une suite a_n telle que pour tout x, $\left|\int_n^{n+1} f(t,x)dt\right| \overset{déf}{=} |a_n(x)| \leq a_n|$ et

$$\sum_n a_n < +\infty.$$

Nous allons dans un premier temps voir des hypothèses sur f assurant des convergences du même type. En fin de section nous verrons une hypothèse plus faible.

ti-integ-gene **Théorème 2.1.1.** *Soient $f : [a,b[\times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue où $a < b$ et J est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que*

1. *pour chaque x, et pour chaque t, $|f(t,x)| \leq g(t)$,*
2. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

Alors $x \in J \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ définit une fonction continue sur J.

Démonstration. La technique de domination permet de prouver que $F(x)$ est bien définie pour tout x. Il suffit de majorer $|f(t,x)|$ par $g(t)$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\int_a^b g(t)dt$ converge, on peut écrire le critère de Cauchy faible sur cette intégrale. Il existe A tel que pour tout

$x \geq A$, $0 \leq \int_x^b g(t)dt < \varepsilon$. Fixons donc un tel A. Considérons y dans J et $x \in J$ proche de y. On a

$$F(x) - F(y) = \int_a^A f(t,x) - f(t,y)dt + \int_A^b f(t,x)dt - \int_A^b f(t,y)dt.$$

chacuns des 2 derniers termes de droite est majoré (en valeur absolue) par ε, du fait de la domination par $g(t)$. Le premier terme de droite est majoré en valeur absolue par ε si x est suffisament proche de y (cela dépend de A et y). Pour cela on utilise l'uniforme continuité sur un compact du type $[a, A] \times [y-1, y+1]$. □ □

Théorème 2.1.2. *Soit J un intervalle ouvert. Soit $f : [a, b[\times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est aussi continue et il existe une fonction continue g vérifiant*

1. *pour chaque x l'intégrale $\int_a^b f(t,x)dt$ converge.*
2. *pour chaque x, et pour chaque t, $|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq g(t)$,*
3. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

Alors la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt$ est de classe C^1.

Démonstration. La preuve est un mélange entre le théorème de dérivation sous le signe somme dans le cas compact et la preuve du théorème précédent. On utilise la domination pour se ramener au cas compact.

On se fixe $y \in J$, et un intervalle $[c, d]$ tel que $y \in [c, d] \subset J$. On fixe aussi $\varepsilon > 0$. Comme $\int_a^b g(t)dt$ converge, on peut écrire le critère de Cauchy faible sur cette intégrale. Il existe A tel que pour tout $x \geq A$, $0 \leq \int_x^b g(t)dt < \varepsilon$. Fixons donc un tel A.

On choisit $\eta > 0$ tel que $[y-\eta, y+\eta] \subset [c, d]$. Pour chaque x dans $[y-\eta, y+\eta]$, et pour chaque t dans $[a, A]$, il existe x_t entre x et y tel que

$$\frac{f(t,x) - f(t,y)}{x-y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_t).$$

Comme x_t est entre x et y il est aussi dans l'intervalle $[y-\eta, y+\eta]$. La continuité uniforme de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur le compact $[a, A] \times [c, d]$ permet (quitte à diminuer $\eta > 0$) d'assurer que pour tout t dans $[a, A]$, et pour tout x dans $[y-\eta, y+\eta]$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_t) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, y) \right| \leq \varepsilon.$$

Il suffit donc maintenant d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{F(x) - F(y)}{x-y} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dt &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_t) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dt \\
&= \int_a^A \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_t) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dt + \int_A^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_t) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dt.
\end{aligned}$$

On majore, en valeur absolu le premier terme de droite par la continuité uniforme sur le compact $[a, A] \times [c, d]$. On majore le second terme par la domination et la convergence de l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ □ □

Exercice 1
Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)dt$ définit une application C^1. Montrer que l'on a $f'(x) = -\frac{x}{2}f(x)$. En déduire l'expression de f.

2.1.1 Une hypothèse plus faible

L'hypothèse de domination normale uniforme en x est forte. Par exemple la fonction

$$f(t,x) = e^{-tx}\sqrt{t+x},$$

ne la satisfait pas sur $J =]0,+\infty[$. On cherche donc à affaiblir cette hypothèse. On remarque que si les théorèmes s'appliquent pour tout domaine du type $[a,b[\times[c,d]$ ou $[a,b[\times]c,d[$ avec $[c,d] \subset J$, alors les théorèmes sont vrais pour tous les points x de J. On montre ainsi que la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\sqrt{t+x}dt,$$

est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

2.1.2 Le cas des suites d'applications

On considère une suite d'applications (f_n) définies sur $[a,b[$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$? Une version faible du théorème th-conti-integ-gene 4.3.4 permet de conclure s'il existe une fonction continue g telle que pour tout n, $|f_n| \leq g$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ existe.

L'inégalité $|f_n| \leq g$ en passant à la limite permet d'avoir $|f| \leq g$, et la domination permet de conclure sur la convergence de $disp\int_a^b f(t)dt$. Pour avoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ on coupe la différence $\displaystyle\int_a^b f_n(t) - f(t)dt$ en deux partie, une intégrale sur $[a,c]$ l'autre sur $[c,b[$. On majore la partie sur le compact $[a,c]$ du fait de la convergence uniforme. On majore la partie sur $[c,b[$ par la convergence (on utilise Cauchy) de $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$.

2.2 Applications

2.2.1 Champs de vecteurs

On considère deux fonctions C^1, P et Q définies sur un pavé ouvert $U =]a,b[\times]c,d[$ de $\mathbb{R}^2$. On cherche à savoir si le vecteur (P,Q) est un gradient, c'est à dire s'il existe une fonction F telle que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \ \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Le lemme de Schwarz dit que si une telle fonction F existe, on doit avoir

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Avec ces hypothèses de régularité, on montre que c'est aussi une condition suffisante : on pose

$$F(x,y) = \int_a^x P(t,y)dt + \int_c^y Q(a,t)dt,$$

et on suppose l'égalité $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. La calcul donne immédiatement $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y)$ car la seconde intégrale ne dépend pas de x. La dérivation d'une primitive et la dérivation sous le signe somme donnent aussi

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)dt + Q(a,y).$$

L'hypothèse $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ donne

$$\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)dt = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}(t,y)dt = Q(x,y) - Q(a,y).$$

Ceci donne $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$. $\square$.

Exercice 2
Trouver les fonctions F dont le gradient est $(x^3 - xy^2, y^3 - x^2y)$.

2.2.2 Méthode de Laplace. Formule de Stirling

Un cas particulier

On veut un équivalent lorsque t tend vers $+\infty$ de $J(t) \overset{déf}{=} \int_0^b x^\alpha e^{t(a-cx^\beta)}dx$, avec $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $c > 0$ et $0 < b \leq +\infty$.

Les hypothèses $\alpha > -1$ et $\beta > 0$ assurent la convergence de l'intégrale en 0. Les hypothèses $c > 0$ et $\beta > 0$ assurent la convergence de l'intégrale en $+\infty$.

Le changement de variable $u = tcx^\beta$ donne

$$J(t) = \frac{1}{\beta}e^{at}(ct)^{-\frac{1+\alpha}{\beta}} \int_0^{ctb^\beta} e^{-u}u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}du.$$

On reconnaît une partie de l'application $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-y}y^{x-1}dy$. Si $b = +\infty$ on a directement

$$J(t) = \frac{1}{\beta}e^{at}(ct)^{-\frac{1+\alpha}{\beta}}\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta}).$$

Si $b < +\infty$, on trouve

$$J(t) = \frac{1}{\beta}e^{at}(ct)^{-\frac{1+\alpha}{\beta}}\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})\left(1 - \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})}\int_{ctb^\beta}^{+\infty} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}e^{-u}du\right).$$

Si t tend vers $+\infty$ alors $\displaystyle\int_{ctx^\beta}^{+\infty} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}e^{-u}du$ tend vers zéro donc

$$J(t) = \frac{1}{\beta}e^{at}(ct)^{-\frac{1+\alpha}{\beta}}\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})(1+o(1)),$$

ce qui prouve que $J(t)$ est équivalente à $\displaystyle\frac{1}{\beta}e^{at}(ct)^{-\frac{1+\alpha}{\beta}}\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})$.

Remarque 4. Par ailleurs une intégration par partie donne

$$\int_A^{+\infty} u^\gamma e^{-u}du = A.e^{-A} + \gamma.\int_A^{+\infty} u^{\gamma-1}e^{-u}du.$$

Une récurrence montre que $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})}\int_{ctx^\beta}^{+\infty} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}e^{-u}du$ est un terme d'ordre $O(A^\gamma e^{-A})$. Ceci permet de conclure que dans les 2 cas ($b = +\infty$ ou non)

$$J(t) = \frac{1}{\beta}e^{at}(ct)^{-\frac{1+\alpha}{\beta}}\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})(1+O(t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}e^{-tcb^\beta})).$$

■

Résultat général et corollaire

La méthode générale vaut pour des intégrales du type $I(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)et.h(x)dx$ où $t \to +\infty$ et h présente un maximum absolu en 0.

Théorème 2.2.1. *Soient g et h deux fonctions continues (éventuellement par morceaux) sur $]0,+\infty[$ telles que*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(x)|e^{h(x)}dx$ *converge.*
2. *Il existe δ_0 tel que pour tout $0 < \delta < \delta_0$, pour tout $x \geq \delta$ on ait $h(x) \leq h(\delta)$.*
3. $g(x) \sim_0 A.x^\alpha$ *avec $A \neq 0$ et $\alpha > -1$, $h(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta)$, avec $\beta, c > 0$.*

Alors $I(t) \sim \displaystyle\frac{A}{\beta}\Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})e^{at}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$.

Remarque 5. Pour les intégrales du type $\displaystyle\int_0^b |g(x)|e^{h(x)}dx$ avec $b < +\infty$, on ce ramène au cas du théorème en prologeant g par 0 sur $[b,+\infty[$.

Les hypothèses du théorèmes font que les parties principales des fonctions g et h sont exactement celles de la première sous-sous-section.

Corollaire 2.2.2. *Soient $]a,b[$ un intervalle borné ou non, g et h des fonctions de classe C^2 sur $]a,b[$ telles que*

1. $\displaystyle\int_a^b |g(x)|e^{h(x)}dx$ *converge,*

2. *la dérivée h' ne change de signe que en un unique point d de $]a,b[$ et $h(d)$ est un maximum absolu de h,*
3. *$g(d) \neq 0$ et $h''(d) < 0$.*

Alors $\int_a^b g(x)e^{th(x)}dx \sim_{t\to+\infty} \Gamma(\frac{1}{2})g(d)e^{th(d)}\sqrt{\frac{2}{-t.h''(d)}}$.

Nous expliquons maintenant comment on passe du théorème au corollaire. On coupe l'intégrale $\int_a^b$ en deux intégrales $\int_a^d$ et $\int_d^b$. La formule de Taylor donne

$$h(x) = h(c) + \frac{h''(c)}{2}x^2 + o(x^2) \text{ et } g(x) \sim g(c).$$

En faisant le changement $u \to u - c$ on se ramène à chaque fois à une intégrale du type $\int_0^{b'}$. On applique alors le théorème avec $\beta = 2$, $c = \frac{-h''(d)}{2}$ $a = h(c)$ $A = g(c)$ et $\alpha = 0$.

Comme on a découpé l'intégrale $\int_a^b$ en 2 morceaux, on trouve comme partie principale

$$2.\frac{g(c)}{2}\Gamma(\frac{0+1}{2})e^{th(d)}\sqrt{\frac{2}{-th''(d)}}.$$

calculons maintant $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1}e^{-t}dt$. En effectuant le changementy de variable $u = \sqrt{t}$, on trouve

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e{-}u^2du = \sqrt{\pi}.$$

Application à la formule de Stirling

Un calcul d'intégration par partie permet de montrer la relation

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

En particulier, on trouve ainsi $\Gamma(n+1) = n!$.

Pour t quelconque on a $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x+t\ln x}dx$, et on pose donc $f_t(x) = t\ln x - x$; $f_t'(x) = \frac{t}{x} - 1$, et donc f_t possède un unique maximum pour $x = t$. Pour se ramener aux hypothèses du corollaire, c'est à dire à une intégrale du type $\int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}dx$, on pose $x = tu$. On a alors

$$\Gamma(t+1) = te^{t\ln t}\int_0^{+\infty} e^{t(\ln u - u)}du \ ;$$

on pose donc $h(u) = \ln u - u$ et $g'u) \equiv 1$. La fonction h admet un unique maximum en $u = 1$, et $h(1) = 1$. On a aussi $h''(1) = -1$. Ainsi le corollaire donne

$$\Gamma(t+1) \sim t.e^{t\ln t}\sqrt{\pi}.1.e^{-t}\sqrt{\frac{2}{-t.(-1)}}.$$

Comme $\Gamma(n+1) = n!$, on trouve bien

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi.n}.$$

Chapitre 3

Transformée de Laplace-Version très provisoire

3.1 Définition et premières propriétés

3.1.1 Définition-convergence

def-TL **Définition 3.1.1.** *Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue ou continue par morceaux, on appelle transformée de Laplace de f la fonction définie par*

$$L(f)(p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt.$$

On note également $C(f) := \{p,\ L(f)(p) \text{ converge}\}$, $A(f) := \{p,\ L(f)(p) \text{ converge absolument}\}$.

On pose $c(f) := \inf C(f)$ et $a(f) := \inf A(f)$ (dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$).

Exemples 3.

Pour $f(t) = t^n$, $L(f)(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$. Pour $f(t) = \cos(at)$, $L(f)(p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}$, pour $f(t) = \sin at$, $L(f)(p) = \dfrac{a}{p^2+a^2}$ et pour $f(t) = e^{at}$, $L(f)(p) = \dfrac{1}{p-a}$.

rem-TLlin **Remarque 6.** Il découle des propriétés de l'intégrale que $f \mapsto L(f)$ est linéaire. ■

prop-cvTL **Proposition 3.1.2.** *On a $C(f) = (c(f), +\infty[$ et $A(f) = (a(f), +\infty[$ avec $(\alpha = [\alpha$ ou $]\alpha$.*

Démonstration. Si $L(f)(p)$ converge absolument, alors pour tout $q > p$ on a

$$0 \leq |f(t)|e^{-qt} \leq |f(t)|e^{-pt},$$

ce qui prouve que $L(f)(q)$ converge absolument. En d'autre termes, $p \in A(f)$ entraine que pour tout $q \geq p$, q est aussi dans $A(f)$.

La convergence simple est un peu plus délicate. Supposons que p est dans $C(f)$ et prenons $q > p$. On pose $F(t) = \int_0^t f(x)e^{-px}dx$. Par définition de $p \in C(f)$, $F(t)$ admet une limite si t tend vers $+\infty$.

Une intégration par partie donne

$$\int_0^x e^{-qt} f(t)dt = \left[F(t)e^{(p-q)t}\right]_0^x + (q-p)\int_0^x e^{(p-q)t} F(t)dt.$$

Comme $F(0) = 0$, si x tend vers $+\infty$, le crochet (à droite) tend vers 0. Le terme dans l'intégrale est équivalent à $F(p)e^{(p-q)t}$ au voisinage de $+\infty$ ce qui prouve que l'intégrale converge. Ainsi les deux termes de droite ont une limite si x tend vers $+\infty$ et donc q est dans $C(f)$. □

h-tlcinftyabs **Théorème 3.1.3.** *La transformée de Laplace est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a(f), +\infty[$.*

Démonstration. On considère $\alpha > a(f)$. Alors, pour tout $p \geq \alpha$,

$$|tf(t)|e^{-pt} \leq |tf(t)|e^{-\alpha t}.$$

Si on choisit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour avoir $a(f) < \alpha - \varepsilon$, on peut écrire

$$|tf(t)|e^{-\alpha t} = |f(t)|e^{-(\alpha-\varepsilon)t}te^{)\varepsilon t} \leq |f(t)|e^{-(\alpha-\varepsilon)t},$$

la dernière inégalité ayant lieu pour tout t suffisamment grand. Ceci montre que $A(t \mapsto tf(t)) \supset]a(f), +\infty[$ et donc on peut utiliser le théorème de dérivation sous le signe somme.

Comme $A(t \mapsto tf(t)) \subset A(f)$ est facile à démontrer, on en déduit $a(tf(t)) = a(f)$ et une récurrence permet de conclure la preuve du théorème. □

3.1.2 Régularité aux bornes

-limderiinfri **Proposition 3.1.4.** *Si f est bornée alors $C(f) \supset A(f) \subset \mathbb{R}_+$ alors*

$$\forall n, \lim_{p \to +\infty} L(f)^{(n)}(p) = 0.$$

Démonstration. La proposition prop-cvTL 3.1.2 montre que $A(f)$ contient $\mathbb{R}_+$. L'inégalité $C(f) \supset A(f)$ découle du fait que la convergence absolue implique la convergence simple.

Un calcul donne

$$\begin{aligned} \left|L(f)^{(n)}(p)\right| &= \left|\int_0^{+\infty} (-1)^n t^n f(t) e^{-pt} dt\right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} K.t^n e^{-\varepsilon t} e^{(p-\varepsilon)t} dt \\ &\leq K'.\frac{1}{p-\varepsilon}. \end{aligned}$$

□

prop-conti0 **Proposition 3.1.5.** *Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge alors $L(f)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et est continue en 0^+.*

Démonstration. L'hypothèse signifie $0 \in C(f)$ donc $C(f)$ contient $\mathbb{R}_+$.

Posons $F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$. Alors $F'(x) = -f(x)$. De plus F est une fonction continue qui tend vers 0 en $+\infty$. C'est donc une fonction bornée et la Proposition prop-limderiinfri 3.1.4 montre que $L(F)$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.

On choisit $n \leq m$ entiers grands et on pose $G_n(p) = \int_0^n f(t)e^{-pt}dt$. La continuité sous le signe somme (cas compact) montre que chaque G_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. On a alors

$$\begin{aligned}
|G_n(p) - G_m(p)| &= \left| \int_n^m f(t)e^{-pt}dt \right| \\
&= \left| \left[-F(t)e^{-pt} \right]_n^m - \int_n^m pF(t)e^{-pt}dt \right| \\
&\leq 3 \max_{u \geq n} |F(u)|,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite des (G_n) vérifie un critère de Cauchy uniforme (en p). Donc elle converge uniformément et donc elle est continue en 0^+. $\square$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
L(f)(p) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\
&= [-F(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} - p \int_0^{+\infty} F(t)e^{-pt}dt \\
&= F(0) - pL(F)(p).
\end{aligned}$$

Cela donne $pL(F)(p) \to 0$ si p tend vers 0.

On a vu $L(\cos)(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$ qui tend vers 0 si p tend vers 0 et pourtant $\int_0^{+\infty} \cos(t)dt$ diverge. Cela montre que la réciproque à la proposition prop-conti0 3.1.5 est fausse sans hypothèse supplémentaire.

Application : Calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

On pose $L(p) := \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{t} dt$. On a pour $p > 0, L'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin t dt = L(\sin)(p)$ d'où

$$L'(p) = -\frac{1}{p^2+1}.$$

Ainsi $L(p) = -\arctan p + C$ et $\lim_{p \to +\infty} L(p) = 0$ donne $C = \frac{\pi}{2}$. Comme L est continue en 0^+, $I = L(0) = \frac{\pi}{2}$.

3.1.3 Transformée des dérivées

3.2 Applications : résolution d'équations aux dérivées partielles

3.2.1 Un exemple

On cherche à résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial t} + u, \tag{3.1}$$ equ-edptl

avec la condition initiale $u(0, x) = 6e^{-3x}$.

On pose $L(x, y) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{yt} u(t, x) dt$. On suppose que tout converge. On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(x,y)}{\partial x} &= \int_0^{+\infty} e^{-yt} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) dt \\
&= 2 \int_0^{+\infty} e^{-yt} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) dt + \int_0^{+\infty} e^{-yt} u(t, x) dt \\
&= 2 \left[u(t, x) e^{-yt} \right]_0^{+\infty} + (2y + 1) L(x, y) \\
&= -12 e^{-3x} + (2y + 1) L(x, y).
\end{aligned}$$

Cette dernière équation est une EDO classique. Les solutions seront de la forme

$$u(x, y) = C e^{(2y+1)x} + \frac{6}{y + 2} e^{-3x}.$$

Chapitre 4

Interversions de limites

4.1 Motivations et exemples

Quelques exemples

Beaucoup de problèmes en analyse sont en fait des problèmes d'interversion de limites. Si on a $f(x,y)$ a-t-on nécessairement l'égalité

$$\lim_{y\to y'}\lim_{x\to x'} f(x,y) = \lim_{x\to x'}\lim_{y\to y'} f(x,y) \ ?$$

La réponse est non. Voici quelques théorèmes qui font explicitement référence à une interversion de limite.

th-unifconti **Théorème 4.1.1.** *Si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f alors f est continue.*

On a $\boxed{\lim_{x\to x'}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to x'} f(x) = f(x') = \lim_{n\to+\infty} f_n(x') = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x'} f_n(x).}$

th-unifinte **Théorème 4.1.2.** *Si (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt.$$

On rappelle ici qu'une intégrale est une limite (sommes de Darboux, méthode des rectangles).

th-contiinte **Théorème 4.1.3.** *Soit f une fonction continue en deux variables x et t. Alors $x \mapsto F(x) := \int_a^b f(x,t)dt$ est continue.*

Démonstration. On considère une suite (x_n) qui converge vers x. On pose $h(t) := f(x,t)$ et $h_n(t) := f(x_n,t)$. La fonction f est continue sur le compact $[a,b]\times[x-1,x+1]$ donc uniformément continue. Quitte à retirer les premiers termes de la suite (x_n) on peut supposer qu'ils sont tous dans $[x-1,x+1]$. L'uniforme continuité s'écrit

$$\forall\varepsilon,\ \exists\eta,\ ||(x,t)-(y,t')|| < \eta \Longrightarrow |f(x,t)-f(y,t')| < \varepsilon. \qquad (4.1)$$ equ1-unifc

Cette inégalité dépend des normes choisies mais elles sont toutes équivalentes dans $\mathbb{R}^2$. On peut donc supposée qu'elle est vrai pour $|| \, ||_\infty$.

Fixons-nous ε et choisissons η associé comme dans (4.1). Si $x_n \in [x-\eta, x+\eta]$, on aura donc
$$|h_n(t) - h(t)| = |f(x,t) - f(x_n,t)| < \varepsilon.$$
En d'autre terme, si N est tel que $\forall\, n \geq N$, $x_n \in [x-\eta, x+\eta]$, on obtient
$$|h_n(t) - h(t)| < \varepsilon,$$
ce qui signifie bien que la suite des h_n converge uniformément vers h. $\square$

Théorème 4.1.4. *Soit f une fonction continue en deux variables x et t. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue alors*
$$x \mapsto F(x) := \int_a^b f(x,t)dt$$
est dérivable et $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Limites continues ou discrètes

Bien qu'apparemment différents, il est important de voir qu'en fait les théorèmes 4.1.3 et 4.1.4 découlent tous les deux du théorème 4.1.2.

D'une part la continuité au point x se montre aussi en prouvant que pour toute suite (x_n) convergente vers x, $F(x_n)$ converge vers $F(x)$.

En choisissant une suite (x_n) on pose $f_n(t) = f(x_n,t)$. Donc le théorème 4.1.3 découlent du théorème 4.1.2.

La dérivabilité s'obtiendra en étudiant $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$. Si on pose $g(h,t) = \dfrac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}$, on voit que le théorème 4.1.4 découle du théorème 4.1.3.

4.2 Une convergence est uniforme

4.2.1 Interversion de limite

Théorème 4.2.1. *Soit $(\varphi_{n,m})$ une (double) suite réelle dépendant des deux indices n et m. On suppose que pour n fixé, la suite $(\varphi_{n,m})_m$ converge vers $\varphi_{n,+\infty}$, et que pour m fixé, la suite $(\varphi_{n,m})_n$ converge vers $\varphi_{+\infty,m}$. Enfin, on suppose que la suite $(\varphi_{n,+\infty})_n$ converge vers $\varphi_{+\infty,+\infty}$ lorsque n tends vers $+\infty$. Si l'une des deux convergences de $(\varphi_{n,m})$ avec l'un des indice fixé est uniforme (par rapport à cet indice fixé), alors $(\varphi_{+\infty,m})_m$ converge aussi lorsque m tend vers $+\infty$ et sa limite est $\varphi_{+\infty,+\infty}$.*

Le même résultat demeure si on suppose que c'est la suite $(\varphi_{+\infty,m})$ qui converge vers $+\varphi_{+\infty,+\infty}$.

Le théorème se comprends mieux avec un diagramme :
$$\begin{array}{ccc} \varphi_{n,m} & \longrightarrow & \varphi_{+\infty,m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi_{n,+\infty} & \longrightarrow & \varphi_{+\infty,+\infty} \end{array}$$

Si l'une des deux convergences est uniforme et si la double limite existe, alors on peut la calculer dans n'importe quel sens.

Ce théorème est l'outil clef pour inverser les limites :

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty} \stackrel{?}{=} \lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}$$

Démonstration. On considère par exemple que la convergence en m est uniforme vis à vis de n. Ceci signifie :

$$\forall\varepsilon, \exists M,\ t.q.\ \forall m \geq M,\ \forall n |\varphi_{n,m} - \varphi_{n,+\infty}| < \varepsilon. \tag{4.2}$$ equ1-cv uni

Par ailleurs nous disposons de l'hypothèses de convergence de $(\varphi_{n,+\infty})$ vers $\varphi_{+\infty,+\infty}$ et de convergence de $\varphi_{n,m}$ vers $\varphi_{+\infty,m}$.

On veut montrer que $\varphi_{+\infty,m}$ converge vers $\varphi_{+\infty,+\infty}$. Fixons donc $\varepsilon > 0$. On commence par prendre M tel que (4.2) soit valide avec $\varepsilon/3$.

On a donc pour tout n et pour tout $m \geq M$, $|\varphi_{n,M} - \varphi_{n,+\infty}| < \varepsilon/3$. Pour ce $m \geq M$ fixé, la suite $(\varphi_{n,m})_n$ converge vers $\varphi_{+\infty,m}$ lorsque n tend vers $+\infty$. À m fixé, on trouve donc un entier $N(m)$ (qui dépend donc de m) tel que pour tout $n \geq N(m)$,

$$|\varphi_{n,m} - \varphi_{+\infty,m}| < \varepsilon/3.$$

Enfin, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|\varphi_{n,+\infty} - \varphi_{+\infty,+\infty}| < \varepsilon/3$. À $m \geq M$ fixé, considérons donc n plus grand que N et que $N(m)$. On a alors

$$|\varphi_{+\infty,m} - \varphi_{+\infty,+\infty}| \leq |\varphi_{+\infty,m} - \varphi_{n,m}| + |\varphi_{n,m} - \varphi_{n,+\infty}| + |\varphi_{n,+\infty} - \varphi_{+\infty,+\infty}|.$$

Le premier terme de droite est inférieur à $\varepsilon/3$ par convergence (uniforme), le second est inférieur à $\varepsilon/3$ par convergence simple, et le dernier par convergence simple (vers la double limite).

Si on suppose que c'est $(\varphi_{+\infty,m})$ qui converge vers $+\varphi_{+\infty,+\infty}$ on utilise la majoration :

$$|\varphi_{n,+\infty} - \varphi_{+\infty,+\infty}| \leq |\varphi_{n,+\infty} - \varphi_{n,m}| + |\varphi_{n,m} - \varphi_{+\infty,m}| + |\varphi_{+\infty,m} - \varphi_{+\infty,+\infty}|.$$

(A faire en exercice). □

rem-invr-lim **Remarque 7.** On peut généraliser ce résultat à des convergences dans des espaces métriques quelconques, et à des convergences "continues". ■

4.2.2 Applications

Comme nous l'avons dit en introduction, le deux théorèmes 4.1.1 et 4.1.2 sont des conséquences immédiates du théorème d'interversion de limites.

Concernant la questions sur les dérivées, on dispose du théorème suivante :

th-cvderiv **Théorème 4.2.2.** *Soit (f_n) une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. On suppose que la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément vers g. Si de plus il existe $c \in [a, b]$ tel que la suite numérique $(f_n(c))$ converge, alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f. De plus f est dérivable et $f' = g$.*

Démonstration. On note l'égalité $f_n(x) = \int_c^x f_n'(t)dt + f_n(c)$. Le théorème th-unifinte 4.1.2 montre que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par

$$f(x) = l + \int_c^x g(t)dt,$$

où $l = \lim_{n\to+\infty} f_n(c)$. En particulier f est dérivable de dérivée g puisque g est continue.

De plus

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(c) - l + \int_c^x f_n'(t) - g(t) \right| \\
&\leq |f_n(c) - l| + \left| \int_c^x |f_n'(t) - g(t)| dt \right| \\
&\leq |f_n(c) - l| + \int_a^b |f_n'(t) - g(t)| dt.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité montre que la convergence est uniforme.

□

4.3 Hypothèses de domination

4.3.1 Convergence normale

def-cvnormale

Définition 4.3.1. *On considère une série de fonctions $\sum f_n$ définies sur $[a, b]$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement s'il existe une suite numérique (a_n) telle que*

1. $\sum_n a_n$ *converge.*
2. *Pour tout n et pour tout x, $|f_n(x)| \leq a_n$.*

On note en particulier que les termes a_n sont positifs. La convergence normale entraine la convergence uniforme. Elle permet donc d'intervertir les limites.

th-cvnormconti

Théorème 4.3.2. *Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, alors elle converge absolument et uniformément. En particulier si les f_n sont continues la limite est continue.*

Exemple 4. Ce théorème est souvent utilisé pour les séries entières, c'est à dire f_n de la forme $f_n(x) = r_n x^n$. On montre que pour tout $r < R$ (R= le rayon de convergence), il y a convergence normale dans le disque de rayon r.

Preuve du théorème th-cvnormconti *4.3.2.* L'absolue convergence est une application directe du critère de Cauchy et de la domination.

$$\sum_p^q |f_n(x)| \leq \sum_p^q a_n.$$

On utilise le critère de Cauchy sur la série des a_n.

L'uniforme convergence se fait presque de façon identique. Si on veut comparer un terme de la série avec la limite, on doit estimer la queue de la série

$$\left|\sum_{n\geq p} f_n(x)\right|.$$

Le critère de Cauchy permet une fois encore d'obtenir une majoration du type

$$|\sum_{p}^{q} f_n(x)| \leq \sum_{p}^{q} a_n < \varepsilon,$$

dès que p et q sont suffisamment grands. On fait tendre q vers l'infini dans cette double inégalité. Comme elle est vraie pour tout x on en tire

$$\sup_x \left|\sum_{n\geq p} f_n(x)\right| \leq \varepsilon,$$

si p est suffisamment grand (à ε fixé). □

4.3.2 Intégrales généralisées à paramètre

Nous donnons ici trois versions apparemment différentes du même théorème. Le point commun, outre que l'on peut passer d'un théorème à l'autre en choisissant le bon formalisme, est l'utilisation dans chaque cas d'une hypothèse de domination.

te-integ-gene **Théorème 4.3.3.** *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b[$ avec $a < b$[1]. On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que*

1. *pour chaque n, et pour chaque t, $|f_n(t)| \leq g(t)$,*
2. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

Alors $\int_a^b f_n(t)dt$ existe. Si de plus il existe f telle que (f_n) converge uniformément sur tout compact vers f et telle que $\int_a^b f(t)dt$ existe, alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

ti-integ-gene **Théorème 4.3.4.** *Soient $f : [a, b[\times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue où $a < b$[2] et J est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une fonction continue g telle que*

1. *pour chaque x, et pour chaque t, $|f(t, x)| \leq g(t)$,*
2. *l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$ converge.*

---

1. Penser à $b = +\infty$
2. Penser à $b = +\infty$

Alors $x \in J \mapsto F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ *définit une fonction continue sur* J.

Théorème 4.3.5. *Soit* J *un intervalle ouvert. Soit* $f : [a,b[\times J \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, telle que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *est aussi continue et il existe une fonction continue* g *vérifiant*

1. *pour chaque* x *l'intégrale* $\int_a^b f(t,x)dt$ *converge.*
2. *pour chaque* x*, et pour chaque* t*,* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq g(t)$*,*
3. *l'intégrale* $\int_a^b g(t)dt$ *converge.*

Alors la fonction définie par $F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$ *est de classe* C^1 *et*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

th-site-integ-gene

Pour simplifier l'intégrale généralisée du théorème 4.3.3, on se place dans le cas $b = +\infty$ et $a = 0$. Notez qu'on peut toujours écrire une intégrale généralisée sous cette forme.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_k(n) := \int_k^{k+1} f_n(t)dt \text{ et } A_k := \int_k^{k+1} g(t)dt.$$

L'hypothèse de domination $|f_n(t) \leq g(t)|$ donne alors $|a_k(n)| \leq A_k$.

L'hypothèse de convergence en g s'écrit $\sum_k A_k < +\infty$. En d'autres termes, on retrouve simplement la convergence normale sur les séries.

L'hypothèse de convergence de (f_n) sur tout compact montre que pour tout k, $a_k(n)$ tend vers $\int_k^{k+1} f(t)dt$ si $n \to +\infty$.

4.3.3 Application : théorème de Dirichlet de convergence des séries de Fourier

Rappel sur les coefficients de Fourier

On s'intéresse à une écriture (éventuelle) sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}.$$

rme-coef-four **Proposition 4.3.6.** *Si la convergence est uniforme, alors nécessairement on doit avoir* $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$.

Démonstration. On a $\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikt}e^{-int}dt$. On utilise l'interversion de limites puisque la convergence en k est uniforme, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}dt.$$

On vérifie que dans le série, tous les termes sont nuls sauf celui pour $k = n$ qui vaut 2π. □

-coef-fourier **Définition 4.3.7.** *On considère f une fonction continue*[3] *de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$. Dans toute la suite on notera*

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt,$$

et on l'appellera n-ième coefficient de Fourier de f.

Si f est à valeur réelle on posera également

$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \;\text{ et }\; b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Ils seront appelées coefficients réels de Fourier de f. On pourra retenir les formules

$$\boxed{\begin{array}{l} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}). \end{array}}$$

On rappelle l'égalité

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)). \qquad (4.3)$$ equ-egalite

Le théorème de Dirichlet

th-dirich **Théorème 4.3.8.** *Si f est une fonction $\mathcal{C}^2$ 2π-périodique alors*

$$f(x) := \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikx},$$

et la convergence est uniforme.

Démonstration. • On commence par montrer que les coefficients de Fourier de f sont des $O(\frac{1}{k^2})$. En effet, une double intégration par parties donne

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(f) &= \int_0^{2\pi} f(t)e^{ik.t}dt \\ &= \frac{1}{ik}\left[f(t)e^{ik.t}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} f't)e^{ik.t}dt \\ &= 0 - 0 - \frac{1}{k^2}\left[f'(t)e^{ik.t}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{ik.t}dt \\ &= \frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{ik.t}dt. \end{aligned}$$

3. On peut aussi supposer seulement f continue par morceaux, voire f Riemann-intégrable

Comme f est $\mathcal{C}^2$, f'' est continue donc bornée sur le segment $[0, 2\pi]$ et donc il existe M tel que pour tout k,

$$\left| \int_0^{2\pi} f''(t) e^{ikt} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f''(t)| \, dt \leq 2\pi M.$$

• La série $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$ converge uniformément car normalement. Si on note g la limite, on obtient donc que pour tout k,

$$c_k(g) = c_k(f).$$

Le théorème de Féjer entraine que nécessairement $f = g$. □

4.4 D'autres théorèmes de contrôle de convergence : les théorèmes de Dini

Les théorèmes de Dini ne sont pas à proprement paré des théorèmes d'interversion de limite. Ils montrent cependant qu'un peu de régularité entraine des convergences plus fortes. Ces résultats illustrent un des but des chapitres ultérieurs. Trouver des arguments pour qu'une suite de fonction converge (dans le bon espace pour la bonne norme).

th-dini **Théorème 4.4.1.** *Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue f.*

1. *Si chaque fonction f_n est croissante, alors la convergence est uniforme.*
2. *Si la suite est croissante (*i.e.*, $f_n \leq f_{n+1}$) alors la convergence est uniforme.*

Démonstration. On suppose donc que chaque f_n est croissante. Comme f est continue, elle est uniformément continue sur le segment $[a, b]$. Elle est aussi croissante puisque pour $x \leq y$ l'inégalité

$$f_n(x) \leq f_n(y)$$

valide pour tout n passe à la limite.

On se fixe $\varepsilon > 0$. Il existe η tel que $|x - y| < \eta$ entraine $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On se donne une subdivision

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_I = b,$$

de pas $(\max a_{i+1} - a_i)$ inférieur à η.

On choisit aussi N tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout i, $|f_n(a_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Soit x dans $[a, b]$. Soit i tel que $a_i \leq x \leq a_{i+1}$.

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)| \\
&\leq f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i) + \varepsilon + f(a_{i+1}) - f(a_i) \\
&\leq f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1}) + f(a_{i+1}) - f(a_i) + f(a_i) - f_n(a_i) + +2\varepsilon \\
&\leq 5\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pour démontrer le second résultat, on pose $g_n := f - f_n$. c'est une suite décroissante de fonctions qui converge simplement vers 0. On note aussi $\alpha_n := ||g_n||_\infty$. La suite (α_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. Notons α sa limite. La convergence uniforme signifie $\alpha = 0$.

Raisonnons par l'absurde et supposons $\alpha > 0$. On pose

$$K_n = g_n^{-1}\left(\left[\frac{\alpha}{2}, +\infty\right[\right).$$

C'est un fermé de $[a, b]$ donc un compact (fermé dans un compact). Par hypothèse il est non vide. De plus la décroissance de (g_n) montre que K_{n+1} est inclus dans K_n (si $g_{n+1}(x) < \frac{\alpha}{2}$ alors $g_n(x)$ est a fortiori supérieur à $\frac{\alpha}{2}$).

L'ensemble $\bigcap_n K_n$ est non vide et il existe x tel que pour tout n, $g_n(x) > \dfrac{\alpha}{2}$. Cela contredit la convergence simple.

□

Chapitre 5

Applications linéaires continues

5.1 L'evn $\mathcal{L}(E,F)$

Caractérisation des applications linéaires continues : définition de la triple-norme

Nous rappelons qu'une application f de l'evn $(E, || \ ||_E)$ dans l'evn$(F, || \ ||_F)$ est continue si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Pour tout x de E, l'image réciproque d'un voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x.
2. L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E.
3. L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.

On rappelle aussi que la propriété (1) s'exprime de la façon suivante :

$$\forall x \in E,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0,\ \text{t.q. } ||x-y||_E < \rho \Longrightarrow ||f(x)-f(y)||_F < \varepsilon \tag{5.1}$$ def-conti

On rappelle aussi qu'une application f de E dans F est uniformément continue si elle vérifie la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0,\ \text{ tel que } \forall x \in E,\ y \in B(x,\rho) \Longrightarrow f(y) \in B(f(x),\varepsilon).$$

On se fixe deux evn $(E, || \ ||_E)$ et $(F, || \ ||_F)$. On s'intéresse aux applications qui sont continues et linéaires (conservation de la structure vectorielle et normée).

Définition 5.1.1. *Soit f dans $L(E,F)$ (f linéaire). On définit (dans $\overline{\mathbb{R}}$)*

$$|||f||| \overset{déf}{=} \sup_{x\in B(0,1)\ x\neq 0} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E} = \sup_{x\in S(0,1)} ||f(x)||_F = \sup_{x\neq 0} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E}.$$

Exercice 3
Montrer l'égalité de ces 3 définitions.

Théorème 5.1.2. *Les conditions suivantes sont équivalents :*

1. *f est continue en* 0.
2. *f est continue*
3. *f est uniformément continue.*

4. $|||f||| < +\infty$

On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans F.

Démonstration. $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ est évident. Faisons $1 \Rightarrow 4$.
Comme f est linéaire on a $f(0_E) = 0_F$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\rho (= \eta(0,\varepsilon))$ tel que pour tout x dans $B(0,\rho)$ on ait $||f(x)||_F < \varepsilon$. Si y est dans $B(0,1)$, alors $\rho.y$ est dans $B(0,\rho)$ et donc

$$||f(y)||_F = ||f(\frac{1}{\rho}\rho.y)||_F = ||\frac{1}{\rho}f(\rho.y)||_F = \frac{1}{\rho}||f(\rho.y)||_F < \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

$4 \Rightarrow 3$. Il suffit de remarquer que f est lipschitzienne :

$$||f(x) - f(y)|| = ||f(x-y)|| = ||x-y||.||f(\frac{x-y}{||x-y||})|| \leq |||f|||.||x-y||.$$

□

Exemples 5.
1- Une matrice $m \times n$ va définir une application linéaire continue de $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$ (ici nous verrons bientôt que peu importe de préciser les normes).
2- Notion de dual topologique. Si E est une $\mathbb{R}$-ev, l'ensemble $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ s'appelle le dual topologique de E. Dual, car on regarde les formes linéaires (applications linéaires de E sur son corps de base) et topologique pour marquer qu'on regarde les formes continues. Par exemple si $E = (\mathcal{C}_c, ||\ ||_\infty)$ est l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$, muni de la norme infinie, alors son dual topologique est l'ensemble des mesures de Radon signées (théorème de Riesz).

Exercice 4
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||\ ||_\infty$. Montrer que l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ (muni de la valeur absolue) définie par $\varphi(f) = f(0)$ est continue (et linéaire).

Exercice 5
Dans $F = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||\ ||_\infty$, montrer que l'application $f \mapsto f'(0)$ n'est pas continue.

La triple-norme est une norme

Proposition 5.1.3. *L'ensemble $(\mathcal{L}(E,F), |||\ |||)$ est un evn. De plus si g est dans $\mathcal{L}(F,G)$ et f dans $\mathcal{L}(E,F)$, alors*

$$|||g \circ f||| \leq |||g|||.|||f|||.$$

Démonstration. Comme $\mathcal{L}(E,F)$ est inclus dans $L(E,F)$ nous allons montrer que c'est un sous-ev. Il est non vide car il contient 0 (l'application nulle).
Soient f et g dans $\mathcal{L}(E,F)$ et α dans $\mathbb{R}$. A-t-on $\alpha.f + g$ dans $\mathcal{L}(E,F)$? Pour évaluer $|||\alpha.f + g|||$ commençons par nous fixer x dans $E \cap B(0,1)$. On a

$$||(\alpha.f + g)(x)|| = ||\alpha.f(x) + g(x)|| \leq |\alpha|.||f(x)|| + ||g(x||. \tag{5.2}$$ equ-1510-1

En majorant chacun des termes de droite de (5.2) par leur triple norme on peut ensuite passer au sup dans le terme de gauche pour obtenir $|||\alpha.f + g||| \leq |\alpha|.|||f||| + |||g|||$. Ceci prouve que $\alpha.f + g$ est dans $\mathcal{L}(E,F)$ et donc $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-ev.
Reste à prouver que $|||\ |||$ est une norme. C'est laissé en exercice. □

5.2 Normes équivalentes

On rappelle deux définitions de topologie :

def-homeo **Définition 5.2.1.** *Une application $f : E \to F$ est un homéomorphisme si c'est une bijection* bi-continue*, c'est à dire telle que f et f^{-1} sont continues.*

Deux espaces $(E, || \, ||_E)$ et $(F, || \, ||_F)$ sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme linéaire de l'un vers l'autre.

Si f est un homéomorphisme linéaire de l'evn $(E, || \, ||_E)$ dans l'evn $(F, || \, ||_F)$ la continuité de f et de f^{-1} montrent qu'il existe 2 constantes A et B telles que pour tout x dans E

$$A||x||_E \leq ||f(x)||_F \leq B||x||_E.$$

Définition 5.2.2. *Les deux normes sont dites équivalentes si il existe deux réels strictement positifs a et b tels que pour tout x dans E,*

$$a|x| \leq ||x|| \leq b|x|.$$

equnormeconti **Proposition 5.2.3.** *Les deux normes $|| \, ||$ et $| \, |$ sur un même espace vectoriel E sont équivalente si et seulement si l'application identité Id de $(E, || \, ||)$ dans $(E, | \, |)$ est un homéomorphisme linéaire.*

Démonstration. Si Id est un homéomorphisme, elle est continue donc $|||Id|||$ existe. Or par définition de $|||Id|||$ on aura pour tout x non nul de E,

$$|x| = |Id(x)| \leq |||Id|||.||x||.$$

Ceci produit le a. De même Id' de $(E, | \, |)$ dans $(E, || \, ||)$ est continue donc cela produira le b.
Réciproquement, si on a *2* alors Id est continue et bijective et sa bijection réciproque est aussi continue. Donc c'est un homéomorphisme. □

5.3 Compacité et EVN

5.3.1 Compacité ou non compacité des boules unités

On considère un evn $(E, || \, ||_E)$. Dans $\mathbb{R}$, les compacts sont les fermés bornés. On se demande donc si la boule unité (fermée) $\overline{B(0,1)}$ est compacte.

unitecompacte **Théorème 5.3.1.** *Dans $\mathbb{R}^k$ la boule unité fermée pour la norme $|| \, ||_1$ est compacte.*

Démonstration. C'est un fermé borné en dimension fini donc un compact. □

Théorème 5.3.2. *En dimension infinie la boule unité fermé n'est pas compacte.*

Démonstration. Elle est basée sur le lemme de Riesz. On choisit y_0 tel que $\|y_0\| = 1$ et on construit une suite (y_n) telle que pour tout n, $\|y_n\| = 1$ et pour tout $p \neq n$, $\|y_n - y_p\| \geq \frac{1}{2}$. Supposons $y_0, \ldots, y_n$ construits et construisons y_{n+1}. L'espace $E_n = Vec(y_0, \ldots, y_n)$ est de dimension au plus $n+1$, donc c'est un fermé de E d'intérieur vide. Il existe donc z dans $E \setminus E_n$, et comme E_n est fermé on a $d(z, E_n) > 0$. L'application définie sur E_n et qui associe à u la valeur $\|u - z\|$ est continue[1] et strictement positive. Si α vaut $d(z, E_n)$, il existe u dans E_n tel que $\|u - z\| \leq 2\alpha$; on pose alors

$$y_{n+1} = \frac{z - u}{\|z - u\|}.$$

Alors $\|y_{n+1}\| = 1$ et pour tout y dans E_n,

$$\|y_{n+1} - y\| = \frac{\|z - u - \|z - u\|.y\|}{\|z - u\|} \geq \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2},$$

car $u + \|z - u\|.y$ est dans E_n. De (y_n) on ne peut extraire aucune sous-suite convergente. □

Remarque 8. Le théorème de Bolzano-Weierstrass n'est donc pas valable dans un Banach en général !

Ce corollaire explique la nécessité de trouver dans les evn des dimension infinie (typiquement $\mathcal{C}(E, F)$) des critères de compacité ; 2 voies peuvent être explorées :

1. Trouver des critères de compacité sur une famille (par exemple Ascoli).
2. Mettre sur E une topologie qui rende la boule unité fermée compacte. Sur un dual topologique on peut mettre la topologie faible * qui rend la boule unité compacte.

5.3.2 Equivalence des normes en dimension finie

Théorème 5.3.3. *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. On va montrer que sur $\mathbb{R}^n$ toute les normes sont équivalentes à $\| \|_1$.
Première étape. On rappelle que $\| \|_\infty \leq \| \|_1 \leq n.\| \|_\infty$, ce qui prouve que ces 2 normes sont équivalentes. Comme la boule unité fermée est compacte pour $\| \|_\infty$ elle l'est pour $\| \|_1$.
Deuxième étape. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $A = \max_i N(e_i)$. Si $x = \sum x_i.e_i$, on aura

$$N(x) \leq \sum_i N(x_i.e_i) = \sum_i |x_i|.N(e_i) \leq A.\|x\|_1.$$

Ainsi l'application linéaire $Id : (\mathbb{R}^n, \| \|_1) \to (\mathbb{R}^n, N)$ est continue. De plus

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq A.\|x - y\|_1,$$

ce qui prouve que l'application N est continue de $(\mathbb{R}^n, \| \|_1)$ dans $(\mathbb{R}, | |)$. Comme la sphère $S^n(0, 1)$ (pour $|| ||_1$) est compacte (pour la topologie induite par $|| ||_1$), son image par N est un compact de $\mathbb{R}$; N y est donc bornée et y atteint ses bornes. Il existe alors $a \geq 0$ tel que pour tout x dans $S^n(0, 1)$ $N(x) \geq a$. On ne peut pas avoir $a = 0$. En effet, si tel était le cas, il existerait x dans $S^n(0, 1)$ vérifiant $N(x) = a = 0$. Or, N est une norme, et $N(x) = 0$ entraine $x = 0 \notin S^n(0, 1)$. Ceci prouve donc que Id est un homéomorphisme. □

compacdimfini **Remarque 9.** On a donc un meilleur résultat que simplement le théorème th-bouleunitecompacte 5.3.1 : en dimension finie toute boule fermée et compacte pour n'importe quelle norme. ■

1. $||u - z|| \leq ||u - u'|| + ||u' - z||$ d'où $||u - z|| - ||u' - z|| \leq ||u - u'||$ ce qui donne par échange des rôles de u et u', $|\,||u - z|| - ||u' - z||\,| \leq ||u - u'||$.

Chapitre 6

Espaces de Hilbert

Ce chapitre est très fortement inspiré de Brézis *Analyse Fonctionnelle.*

6.1 Définition. Projection sur un convexe fermé

6.1.1 Produit scalaire et norme

Si H est un $\mathbb{R}$-ev, on rappelle qu'un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire symétrique positive et définie :

1. $u \mapsto (u, v)$ et $v \mapsto (u, v)$ sont linéaires.
2. $(u, v) = (v, u)$.
3. $(u, u) \geq 0$.
4. $(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Exemples 6.

Dans $\mathbb{R}^2$, si on écrit $x = (x_1, x_2)$, la forme définie par $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ est une forme bilinéaire définie positive et symétrique.

Dans $\mathbb{C}^0([0, 1])$ $(f, g) := \displaystyle\int f(t)g(t)dt$ est une forme bilinéaire définie positive et symétrique.

remCouR **Remarque 10. Dans toute la suite, les résultats seront énoncés dans le cas réel. Ils s'étendent cependant sans aucun problème au cas complexe en considérant une forme sesquilinéaire (forme hermitienne).** ■

lem-CS **Lemme 6.1.1** (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tout u, v dans H,*

$$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)}\sqrt{(v, v)}.$$

Démonstration. On fixe u et v et on considère un paramètre réel t. Alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u + tv, u + tv) \\ &= (u, u) + 2t(u, v) + t^2(v, v). \end{aligned}$$

Nous obtenons un polynôme en t du second degré qui est toujours positif donc son discriminent est négatif ou nul. C'est à dire

$$(u,v)^2 \leq (u,u)(v,v).$$

□

Le produit scalaire permet de définir *la norme associée* en posant

$$|u| = \sqrt{(u,u)}.$$

Il s'agit bien d'une norme : comme le produit scalaire est positif alors $|u|$ est bien définie. Par ailleurs le produit scalaire est défini donc $|u| = 0$ signifie $u = 0$. Enfin, la bilinéarité donne $|\lambda u| = |\lambda||u|$. Il ne reste plus qu'à vérifier l'inégalité triangulaire. Elle utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(u,v) \leq |u|^2 + |v|^2 + 2|u||v| = (|u|+|v|)^2.$$

Un produit scalaire vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2). \tag{6.1}$$ equ-idenpa

Exercice 6
equ-idenparallelo
Faire la preuve de (6.1).

def-Hilbert **Définition 6.1.2.** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u,v) tel que l'espace vectoriel normé (pour la norme associée) soit complet.*

Exemple 7. $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien est un espace de Hilbert.

6.1.2 Un exemple plus compliqué : l'espace l^2

L'espace est un espace de Hilbert

On considère l'espace l^2 des suites réelles $\underline{u} = (u_n)$ vérifiant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

On pose donc $(\underline{u}, \underline{v}) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. L'inégalité de Hölder montre que la série est bien convergente. Cela définit un produit scalaire sur l^2 et la norme $|| \, ||_2$ en est issue.

Il reste à démontrer que l'espace est complet.

Considérons donc une suite $(\underline{x}_m)_m$ de Cauchy. Chaque terme $\underline{x}_m$ est une suite $(x_{m,n})_n$. L'inégalité

$$|x_{m,n} - x_{p,n}|^2 \leq \sum_j |x_{m,j} - x_{p,j}|^2$$

montre que pour chaque n, la suite $(x_{m,n})_m$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$). Elle converge donc. On note y_n sa limite et $\underline{y}$ la suite ainsi obtenue.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit N tel que pour tout $m, p \geq N$, $||\underline{x}_m - \underline{x}_p||_2 < \varepsilon$. Soit n un entier. On obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n} |x_{m,j} - x_{p,j}|^2 &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} |x_{m,j} - x_{p,j}|^2 < \varepsilon^2 \\ &\quad \text{en faisant } p \to +\infty \\ \sum_{j=0}^{n} |x_{m,j} - y_j|^2 &\leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est vrai pour tout n, donc si on fait $n \to +\infty$ on trouve

$$||\underline{x}_m - \underline{y}||_2 \leq \varepsilon$$

dès que $m \geq N$. Cela montre que la suite converge vers $\underline{y}$. Enfin, la suite est de Cauchy, donc bornée. L'inégalité

$$\sum_{j=0}^{n} |x_{m,j}|^2 \leq ||\underline{x}_m||_2^2$$

montre que $\underline{y}$ est également dans l^2.

Base hilbertienne

Dans l^2 on note $\underline{e}_n$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui vaut 1. On remarque (on rendra cette écriture plus rigoureuse à la fin du chapitre) que la suite $\underline{u} = (u_n)$ s'écrit aussi

$$\underline{u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \underline{e}_n = \sum_{n} (\underline{u}, \underline{e}_n) \underline{e}_n.$$

Dans toute la suite H sera un espace de Hilbert, (u, v) le produit scalaire qui le définit et $|u|$ la norme associée.

6.1.3 Projection sur un convexe fermé

Commençons par un résultat technique :

em-continorme **Lemme 6.1.3.** *Si u est un point de H, alors $x \mapsto |u - x|$ est continue. Elle est même 1-Lipschitz.*

Démonstration. L'inégalité triangulaire donne $|u - x| \leq |u - y| + |y - x|$, ce qui s'écrit

$$|u - x| - |u - y| \leq |x - y|.$$

En échangeant x et y on obtient $|u - y| - |u - x| \leq |x - y|$ et donc

$$||u - x| - |u - y|| \leq |x - y|.$$

$\square$

def-convexe **Définition 6.1.4.** *Une partie $A \subset H$ est dite convexe si pour tout u et v dans A et pour tout $t \in [0,1]$, $tu + (1-t)v$ est encore dans A.*

Exemple 8. Une boule (fermée ou ouverte) est convexe.

lem-ssevconv **Lemme 6.1.5.** *Un sous-espace vectoriel est convexe.*

theo-projconv **Théorème 6.1.6.** *Soit $K \subset H$ un convexe fermé (non vide). Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $u \in K$ tel que*

$$|x-u| = \min_{v \in K} |x-v|.$$

De plus u est caractérisé par $u \in K$ et pour tout v dans K,

$$(x-u, v-u) \leq 0.$$

Démonstration. Soit (v_n) une suite d'éléments de K qui telle que $d_n := |x - v_n|$ tende vers $d := d(x,K) = \inf_{v \in K} |x-v|$. On montre que la suite est de Cauchy.

Si on applique l'identité du parallélogramme avec $a = x - v_n$ et $b = x - v_m$ on obtient

$$\left| x - \frac{v_n + v_m}{2} \right|^2 + \left| \frac{v_n - v_m}{2} \right|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Comme $\dfrac{v_n + v_m}{2}$ est dans K, $\left| x - \dfrac{v_n + v_m}{2} \right|$ est plus grand que d, ce qui entraine

$$|v_n - v_m|^2 \leq 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2.$$

Si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe N tel que pour tout $p \geq N$, $0 \leq d_p - d < \varepsilon$. Si n et m sont supérieurs à N, on a donc $|v_n - v_m| \leq C.\varepsilon$ ce qui montre que la suite (v_n) est bien de Cauchy. Comme l'espace est complet elle converge. On note u sa limite et le lemme 6.1.3 (lem-continorme) permet d'avoir

$$|u - x| = d.$$

Si v est un point quelconque de K et t dans $[0,1]$, $tv + (1-t)u = u + t(v-u)$ est dans K. Donc $|x - (tv + (1-t)u)|^2 \geq d^2$, ce qui donne

$$\begin{aligned} d^2 \leq |x-u|^2 - 2t(x-u, v-u) + t^2|v-u|^2 &= d^2 - 2t(x-u,v-u) + t^2|v-u|^2 \\ \text{i.e., } 0 &\leq -2t(x-u,v-u) + t^2|v-u|^2. \end{aligned}$$

Lorsque t tend vers 0, le terme dominant est $-2t(x-u, v-u)$ qui doit être positif ou nul, d'où

$$(x-u, v-u) \leq 0.$$

Enfin on a

$$0 \geq (x-u, v-u) = (x-v, v-u) + |v-u|^2 = -(x-v, u-v) + |v-u|^2.$$

Si v est un autre point minimisant, le terme de droite est positif donc doit être nul, ce qui donne bien $u = v$.

Réciproquement, si $u \in K$ vérifie pour tout v, $(x-u, v-u) \leq 0$ alors

$$\begin{aligned} |x-v|^2 &= |x-u+u-v|^2 \\ &= |x-u|^2 + 2(x-u, u-v) + |u-v|^2 \geq |x-u|^2 \end{aligned}$$

car les 2 termes suivant à droite sont positifs. □

def-projconv **Définition 6.1.7.** *Avec les notations précédentes, on définit la projection de x sur K, par $u = P_K(x)$.*

m-projhilbert **Remarque 11.** Si x est dans K, l'unicité donne $P_K(x) = x$. ■

Exercice 7
Montrer que P_K est 1-Lipschitzienne. Montrer que 1 est la meilleure constante de Lipschitz possible.

rop-caracproj **Proposition 6.1.8.** *Si F est un sous-espace vectoriel fermé dans H alors P_F est un opérateur linéaire. De plus $P_F(x)$ est caractérisé par*

$$P_F(x) \in H \text{ et } \forall v \in H,\ (x - P_F(x), v) = 0.$$

Démonstration. Nous avons vu qu'un sous-espace vectoriel est convexe. Si v est dans F et t dans $\mathbb{R}$, on doit donc avoir

$$0 \geq (x - P_F(x), tv - P_F(x)) = t(x - P_F(x), v) - (x - P_F(x), P_F(x)).$$

Cette inégalité est vraie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et elle entraine $(x - P_H(x), v) = 0$.

Réciproquement, pour v dans F,

$$|x-v|^2 = |x-P_F(x)+P_F(x)-v|^2 = |x-P_F(x)|^2+2(x-P_F(x), P_F(x)-v)+|P_F(x)-v|^2 = |x-P_F(x)|^2+|P_F($$

Il s'agit de l'égalité de Pythagore qui permet de voir que $(x - y, v) = 0$ pour tout v dans F signifie que y réaliste la distance minimale, *i.e.*, $y = P_F(x)$.

Il reste maintenant à voir que P_F est linéaire. On a déjà (Rem. rem-projhilbert 11) que $P_F \circ P_F = P_F$. Il reste à vérifier la linéarité.

Soient $y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit v dans H. Alors $P_F(x) + \lambda P_F(y)$ est dans F (stabilité par combinaison linéaire) et on a

$$(x + \lambda y - P_F(x) - \lambda P_F(y), v) = (x - P_F(x), v) + \lambda^2(y - P_F(y), v) = 0 + 0 = 0,$$

ce qui montre l'égalité $P_F(x + \lambda y) = P_F(x) + \lambda P_F(y)$. □

6.2 Dual topologique d'un espace de Hilbert

h-dualhilbert **Théorème 6.2.1** (Riesz-Fréchet). *Soit ϕ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\phi(x) = (f, x).$$

Démonstration. Si ϕ est la forme nulle, on choisit $f = 0$. Sinon, posons $F = \ker \phi$. Il s'agit d'un hyperplan (noyau d'une forme linéaire), fermé puisque ϕ est continue. Si y vérifie $\phi(y) \neq 0$, on pose $u = y - P_F(y)$. Par construction, pour tout x de F,

$$(u, x) = 0 = \phi(x).$$

D'autre part $(u, y) = (u, y - P_F(y)) + (u, P_F(y)) = |y - P_F(y)|^2 + 0$ par définition de u et de $P_F(y)$. Comme y n'est pas dans F, $y \neq P_F(y)$ et donc $(u, y) \neq 0$.

Pour t est dans $\mathbb{R}$, on a $(tu, y) = t(u, y) = \phi(y)$ si l'on pose $t = \dfrac{\phi(y)}{(u, y)}$. Pour ce t, on pose $f = t.u$. Nous venons donc de voir que l'égalité

$$\phi(x) = (f, x)$$

a lieu pour tout x dans F et aussi pour $x = y$.

Si x est dans $H \setminus F$, on pose $\lambda = \dfrac{\phi(x)}{\phi(y)}$. Alors $\phi(x) = \lambda\phi(y)$ et donc $x - \lambda y$ est dans F. Ainsi,

$$x = \lambda y + x - \lambda y.$$

Cela donne $(f, x) = (f, \lambda y) + (f, x - \lambda y) = \lambda(f, y) = \lambda\phi(y) = \phi(x)$. □

6.3 Base Hilbertienne

6.3.1 Rappels sur l'orthonormalisation

On rappelle que dans un espace-vectoriel, une base est une famille libre génératrice. Elle est dite *orthogonale* si les vectuers de la base sont deux à deux orthogonaux. Elle est dite *normée* si tous les vecteurs sont de norme 1.

-Gram-Schmidt **Théorème 6.3.1** (Gram-Schmidt)**.** *Si $F \subset H$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors il existe une base orthonormée de F.*

Démonstration. La preuve se fait en construisant par récurrence une famille libre orthonormée. Lorsque le cardinal de la famille est la dimension de F, il s'agit d'une base.

La construction par récurrence utilise la projection orthogonale qui est ici égale à la projection sur le convexe fermé qu'est l'espace construit à l'étape précédente.

L'amorce se fait en choisissant un vecteur non nul dans F et en le normalisant (en le divisant par sa norme). Cela donne un vecteur e_1. Si on a construit n vecteurs normés et deux à deux orthogonaux dans F, $e_1, \ldots, e_n$ on pose $E_n := Vect(e_1, \ldots, e_n) \subset F$. Si l'inclusion est stricte on choisit $f \notin E_n$ dans F et on pose

$$e_{n+1} := \frac{f - P_{E_n}(f)}{|f - P_{E_n}(f)|}.$$

Par construction, il est normé et orthogonal à tout vecteur de E_n donc aux e_i pour $i \leq n$. □

6.3.2 Base hilbertienne

f-sommehilber **Définition 6.3.2.** *Soit (E_n) une suite de sous-espaces fermés de H. On dit que H est égal à la somme vectoriel des (E_n) et on note $H = \oplus_n E_n$ si les E_n sont deux à deux orthogonaux et l'espace vectoriel engendré par l'union des E_n est dense dans H.*

Il convient de rappeler que l'espace vectoriel engendré par une famille quelconques de vecteurs $(e_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs de la famille.

-bessellimite **Théorème 6.3.3.** *On suppose que H est égal à la somme vectoriel des (E_n). Soient u dans H et $u_n := P_{E_n}(u)$. Alors,*

1. $u = \sum_{j=0}^{+\infty} u_j$ i.e., $u = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} u_j$.
2. *On a l'égalité de Bessel-Parseval :* $|u|^2 = \sum_j |u_j|^2$.

Réciproquement, si (u_n) est une suite de H telle que chaque u_n est dans E_n et $\sum_n |u_n|^2 < +\infty$, alors la série $\sum_n u_n$ converge (dans H) vers un élément u et $P_{E_n}(u) = u_n$ pour chaque n.

Démonstration. Commençons par quelques résultats intermédiaires.

On pose $P_k := \sum_{n\leq k} P_{E_n}$. Rappelons que $P_{E_n}(x)$ est caractérisé par

$$P_{E_n}(x) \in E_n,\ \forall v \in E_n\ (x - P_{E_n}(x), v) = 0.$$

Comme les E_n sont deux à deux orthogonaux, si v est dans E_n et w dans E_m $m \neq n$, alors

$$(v, w) = 0.$$

Ainsi, $(P_{E_n}(x), w) = 0$ et donc $P_{E_m} \circ P_{E_n}(x) = 0$.

De plus $P_{E_n}(P_{E_n}(x)) = P_{E_n}(x)$. Ces égalités montrent que P_k est un projecteur : P_k est linéaire et $P_k \circ P_k = P_k$. Son image est $F_k := \oplus_{n\leq k} E_n$.

Chaque P_{E_n} est Lipschitz, donc P_k est continue.

Nous affirmons que pour tout v dans F_k et pour tout x dans H,

$$|x - P_k(x)|^2 + |P_k(x) - v|^2 = |x - v|^2. \tag{6.2}$$ equu-pythago

Il s'agit juste du théorème de Pythagore et il est une conséquence directe du fait que P_k est la projection orthogonale sur F_k. Cela entraine

$$|x - P_k(x)| \leq |x - v|,\ \forall v \in F_k. \tag{6.3}$$ equ-inepytl

Enfin, si (v_m) est une suite de vecteurs dans $Vect\{\bigcup_n E_n\}$ qui converge vers un point $x \in H$ et, si on définit $(k(m))$ le plus petit entier k tel que v_m appartienne à F_k, alors la suite $k(m)$ est bornée si et seulement si x est dans l'un des F_k (ici on utilise que les F_k sont fermés).

Comme les vecteurs u_n sont deux à deux orthogonaux, on a

$$|P_k(u)|^2 = (P_k(u), P_k(u)) = \sum_{n=1}^{k} |u_n|^2. \tag{6.4}$$ equ-parseva

D'autre part, par définition de u_n, $(u, u_n) = (u - u_n + u_n, u_n) = |u_n|^2$. En sommant sur n on trouve

$$(u, P_k(u)) = \sum_{n=1}^{k} |u_n|^2 = |P_k(u)|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$|P_k(u)| \leq |u| \tag{6.5}$$

equ-20brez

(qui est vraie pour tout u). Supposons que (v_m) dans $Vect\{\bigcup_n E_n\}$ converge vers u. Si $\varepsilon > 0$ est fixé, on a $|u - v_m| < \varepsilon$.

Par ailleurs, pour tout $k \geq k(m)$, $P_k(v_m) = v_m$ puisque v_m est dans $\oplus_{n \leq k} E_n$. Ainsi equ-20brezis (6.5) appliquée à $u - v_m$ donne

$$|P_k(u) - v_m| = |P_k(u) - P_k(v_m)| \leq |u - v_m| < \varepsilon,$$

et donc

$$|u - P_k(u)| \leq |u - v_m| + |v_m - P_k(u)| < 2\varepsilon.$$

Ceci montre bien $u = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^k u_n$. Ensuite, equ-parsevalpartiel (6.4) montre l'égalité de Parseval en faisant $k \to +\infty$. □

-base hilbert **Définition 6.3.4.** *On dit que H admet une base hilbertienne s'il existe une famille de vecteurs (e_n) orthonormées telle que le sous-espace engendré par ces vecteurs soit dense dans H.*

ehilbertdenom **Théorème 6.3.5.** *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne dénombrable.*

Démonstration. Nous rappelons qu'un espace est dit séparable s'il existe une famille dénombrable et dense. Soit donc (f_n) dénombrable (*i.e.,* $n \in /N$) et dense. On note E_n l'espace engendré par $e_1, \ldots, e_n$. Le principe d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire une famille dénombrable de vecteurs e_n, deux à deux orthogonaux et normés tels que pour tout n, base de E_n. Alors les (e_n) forment une base hilbertienne. □

6.3.3 Exemple : l'espace l^2

La suite des vecteurs $\underline{e}_n$ construite pour l^2 est une base hilbertienne.

6.3.4 Compléments, avertissement, exemples

Compléments

Si H admet une base hilbertienne dénombrable, (e_n) on a donc pour tout x dans H,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} (x, e_n) e_n,$$

au sens où $\lim\limits_{k \to +\infty} |x - \sum\limits_{n=0}^{k} (x, e_n) e_n| = 0$. En outre

$$|x|^2 = \sum_n (x, e_n)^2.$$

Il est important de bien noter qu'une base hilbertienne n'est pas une base au sens de l'espace vectoriel. Comme nous l'avons rappelé, une base au sens vectoriel signifie qu'on ne regarde que les combinaisons linéaires finies de ces vecteurs. Une base hilbertienne signifie qu'on regarde des combinaisons linéaires infinies (donc des limites).

Une base hilbertienne est à une base vectorielle ce que sont les séries entières aux polynômes.

Si on ne suppose pas l'espace séparable, alors il existe encore une base hilbertienne, mais il faut pour cela utiliser la notion de famille *sommable* et le *Lemme de Zorn* . On pourra voir Rudin, analyse réelle et complexe.

Exemple : le cas Fourier

Nous avons déjà vu l'exemple de l^2.

Si $H = L^2([0,2\pi])$ alors la famille composée des fonctions données par $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$ et $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ définissent une base hilbertienne. On retrouve l'analyse de Fourier et l'égalité de Parseval.

Nous avions vu que si f est $\mathcal{C}^2$, alors on a

$$f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)),$$

la convergence étant uniforme. En fait, la convergence a lieu dans L^2 pour toute fonction dans L^2, *i.e.,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\left|f(t) - \frac{a_0(f)}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt))\right|^2 dt = 0.$$

Homéomorphismes

Il est donc assez facile de voir que tous les espaces de Hilbert séparables sont homéomorphes et même isométriques à l^2. Pour s'en convaincre, il suffit de choisir une base hilbertienne et de l'envoyée sur la base $(\underline{e}_n)$, puis de définir l'application par linéarité (et/ou continuité).

Quand-est-ce qu'un norme découle d'un produit scalaire ?

rpoquehilbert **Théorème 6.3.6.** *Soit H un espace vectoriel et $|\ \ |$ une norme sur H vérifiant l'identité du parallélogramme*

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2).$$

Alors $|\ \ |$ découle d'un produit scalaire.

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$\phi(x,y) := \frac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right)$$

définit un produit scalaire, c'est à dire une forme bilinéaire, définie positive symétrique. □