Topologie 2- Licence maths

Renaud Leplaideur

2019
UNC

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

1.1 Rappels sur les ensembles

1.1.1 Formalisme ensembliste

Un ensemble E est une collection (éventuellement vide) *d'éléments*. L'ensemble vide se note $\emptyset$. Un ensemble décrit à partir de ses élément se note avec des accolades. Pour signifier que x est un élément de E on écrit $x \in E$.

Exemple 1. $\{0, 1, 2\}$ désigne l'ensemble composé des 3 éléments, 0, 1 et 2.

On dispose d'opération sur les ensembles :

1. L'intersection, $\cap$. Si A et B sont deux ensembles, $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.
2. L'union, $\cup$. Si A et B sont deux ensembles, $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (c'est à dire à au moins l'un des deux).
3. L'inclusion, $\subset$. Si A et B sont deux ensembles, écrire $A \subset B$ signifie que tous les éléments de A sont aussi éléments de B. On dit alors que A est un *sous-ensemble ou une partie* de B.
4. Le produit, $A \times B$, désigne l'ensemble des *couples* dont la première coordonnée est dans A et la deuxième dans B, c'est à dire

$$A \times B = \{(x, y),\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Nier l'inclusion, $A \not\subset B$ signifie que A contient un élément qui n'est pas dans B. Ainsi, $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.

L'intersection et l'union peuvent se faire sur une famille quelconque. Ainsi, l'intersection de deux ensembles permet de définir par récurrence l'intersection d'un nombre fini d'ensembles. Mais on peut aussi avoir une intersection (ou une union) infinie :

Exemples 2.
$\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ désigne l'intersection que tous les ensembles A_n c'est à dire

$$x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{si et seulement si } \forall n,\ x \in A_n.$$

$\bigcup_{x \in I} A_x$ désigne l'union des A_x, c'est à dire que y appartient à cette union si et seulement si y appartient à l'un (au moins) des A_x.

Exercice 1

1/ Décrire $\cap_{x\in]-1,1[}[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ fixé.
2/ Décrire $\cup_{x\in]-1,1[}[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ fixé.
3/ Décrire $\cap_{x\in]-\varepsilon,\varepsilon[}[x-1, x+1]$ avec $\varepsilon > 0$ fixé.

L'inclusion est une relation d'ordre partielle sur les ensembles. Relation d'ordre signifie que

1. l'inclusion est réflexive : $A \subset A$, .
2. L'inclusion est transitive : si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.
3. L'inclusion est antisymétrique : si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.

Remarque 1. Cette dernière propriété permet de vérifier dans la pratique l'égalité de deux ensembles. On montre la double inclusion.

Dire $A \subsetneq B$ signifie que A est inclus strictement dans B, c'est à dire $A \subset B$ et $B \not\subset A$.

Si E est un ensemble, on définit un nouvel ensemble, appelé ensemble des parties de E et noté $\mathcal{P}(E)$ qui est l'ensemble des sous-ensembles de E. Comme $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$, $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide ; il contient $\emptyset$ et E (si celui-ci n'est pas vide).

Si x est un élément de E, $\{x\}$ est un *singleton*, c'est à dire un ensemble qui ne contient qu'un unique élément, cet élément étant x. Ainsi $\{x\} \subset E$, ce qui s'écrit aussi $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$. **On prendra soin de ne pas confondre x et $\{x\}$.** L'un est un élément de E, l'autre un sous-ensemble de E.

Exemple 3. Ainsi les écritures $x \subset E$ et $\{x\} \in E$ n'ont aucun sens.

Dans ce cours on utilisera souvent des chaînes d'appartenance du type :

$$\boxed{x \in U \subset A}$$

ce qui signifie que x est un élément d'un ensemble U qui est lui un sous-ensemble de A.

Exemple 4. On pourra écrire $x \in \{x\} \subset E$.

Lemme 1.1.1. *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. Alors*

$$E \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} E \setminus A_i$$

Démonstration. Par définition du complémentaire un élément de E appartient à exactement l'un des ensembles A_i ou $E \setminus A_i$. Dire $x \notin \cap A_i$ signifie que x n'est pas dans tous les A_i donc qu'il est dans au moins un B_i.

Réciproquement, dire que x est dans l'un des B_i signifie que x n'est pas dans tous les A_i, donc dans le complémentaire de l'intersection des A_i. □

1.1.2 Applications

Premières définitions

Étant donnés deux ensembles E et F, on appelle *application* de E vers F toute opération qui consiste à associer à chaque élément x de E un élément (et un seul) dans

F. Souvent, on donne un nom à l'application, et souvent ce sera f, et l'élément associé à x se note $f(x)$. On note aussi

$$f : x \mapsto f(x)$$

pour dire qu'on considère l'application f. L'ensemble E est l'ensemble de départ, l'ensemble F est l'ensemble d'arrivée. Ils ne sont pas nécessairement identiques (ni de "même nature").

Si x est un élément de E et $f : E \to F$ une application, $f(x)$ s'appelle *l'image* de x par f. Si y est un élément de F (ensemble d'arrivée) et si on a $y = f(x)$, alors on dire que x est **un** *antécédent* de y par x. Si x n'a qu'une seule image, l'élément y peut lui avoir plusieurs antécédents (ou aucun).

Une application $f : E \to F$ se caractérise par son *graphe*. Le graphe de f est l'ensemble des éléments de $E \times F$ de la forme $(x, f(x))$.

Il est courant de parler d'une application à partir de son expression en x lorsque celle ci existe. C'est cependant un **abus de langage source d'erreurs de d'incompréhensions**.

Exemple 5. On parle de x^2 pour décrire l'application qui associe à chaque x de $\mathbb{R}$ son carré, $x^2 = x.x$. On voit aussi e^x pour $x \mapsto e^x$ ou encore $\sin(x)$ pour l'application sinus ou sin.

On rappelle que $f : E \to F$ est dite :

1. *injective* si chaque y de l'ensemble d'arrivée a **au plus** un antécédent par f. Cela signifie aussi que toute paire d'éléments x et x' différents dans E, $f(x) \neq f(x')$, ou encore, que si $f(x) = f(x')$, alors (nécessairement) $x = x'$.
2. *surjective* si tout élément y de l'ensemble d'arrivée a **au moins** un antécédent par f.
3. *bijective* si elle est injective et bijective.

Exemple 6. exp une une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. $x \mapsto x^2$ n'est ni injective ni surjective lorsqu'on la considère comme une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Elle est injective si on restreint l'ensemble de départ à $\mathbb{R}_+$ et surjective si on restreint l'ensemble d'arrivée à $\mathbb{R}_+$ également.

Si $f : E \to F$ est une bijection, chaque y de F admet un unique antécédent par f. Cela définit une autre application, inverse de f, notée (souvent) f^{-1}. Elle vérifie

$$\boxed{f(x) = y \iff y = f^{-1}(x)}$$

Remarque 2. Noter que l'écriture $f^{-1}(y)$ n'a de sens que parce que f est bijective. ■

Images et préimages d'ensembles

On considère une application f de E vers F.

Définition 1.1.2. *Si A est une partie de E, l'ensemble des points images par f des éléments de A se note $f(A)$. Si B est une partie de F, l'ensemble des éléments de E ayant une image par f dans B se note $f^{-1}(B)$.*

Remarque 3. Il s'agit de **notations**. Il faut apprendre à distinguer $f(x)$ de $f(\{x\})$, $f^{-1}(y)$ (valable seulement si f est bijective) et $f^{-1}(\{y\})$. ■

Question 1. Les opérations ensemblistes $\cap$ et $\cup$ sont-elles préservées par f ?

> **On retiendra** : les opérations ensemblistes ne sont pas nécessairement préservées par les images directes mais le sont par les images réciproques :
> $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$,
> $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

1.2 Norme sur un espace vectoriel

1.2.1 Définition et exemples

Nous considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Il s'agit de mettre une structure topologique qui respecte la structure vectorielle.

Définition 1.2.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-ev (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E toute application $||\ || : E \to \mathbb{R}_+$ telle que*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout x dans E, $||\lambda.x|| = |\lambda|.||x||$.*
2. *Pour tout x et y dans E, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité triangulaire).*
3. *Si $||x|| = 0$ alors $x = 0$.*

Un espace vectoriel muni d'une norme s'appelle un espace vectoriel normé. On utilisera souvent l'abréviation "evn".

Remarque 4. La première propriété donne immédiatement $||0|| = 0$. Donc pour une norme $||x|| = 0 \iff x = 0$. ■

Cette distance permet de définir la distance entre un point x de E et une partie non vide A de E en posant

$$d(x, A) = \inf\{||x - y||\ y \in A\}.$$

On notera que cette borne inférieure est bien définie car l'ensemble considéré n'est pas vide (A est non vide) et est minoré dans $\mathbb{R}$ (par 0).

Exemple 7. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne (norme $||\ ||_2$) on peut calculer la distance d'un point à une droite.

Exemples

1- L'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue est une evn.

2- Dans $\mathbb{K}^n$, $||(x_1, \ldots, x_n)||_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$, $||(x_1, \ldots, x_n)||_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ et $||(x_1, \ldots, x_n)||_\infty = \max_i(|x_i|)$.

3- Dans l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$on aura $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$ (= "$\sum_{t\in[0,1]} |f(t)|$"), $||f||_p = \left(\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $||f||_\infty = \sup |f(t)|$. Notez que $||\ ||_\infty$ s'appelle la *norme de la convergence uniforme.*

4- Sur l'espace $\mathcal{S}$ des suites réelles on pose $||\underline{u}||_p = \left(\sum_n |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ et $||\underline{u}||_\infty = \sup_n |u_n|$. On introduit alors le sous-espace l^p $(p \leq +\infty)$ des suites $\underline{u}$ définies par

$$\underline{u} \in l^p \iff ||\underline{u}||_p < \infty.$$

Ainsi l^∞ est l'ensemble des suites bornées. Sur l^p, $||\ ||_p$ est une norme.
Il n'est *a priori* pas simple de voir que l^p est un sous-espace vectoriel. En fait on démontre en même temps que c'est une sous-espace et qu'il est normé.

Lemme 1.2.2. *Soit α dans $]0,1[$. Soient u et v deux réels strictement positifs. Alors $u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v$, avec égalité si et seulement si $u = v$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $u^\alpha v^{1-\alpha} = e^{\alpha \log u + (1-\alpha)\log v}$ et d'utiliser la stricte convexité de l'application exponentielle. $\square$

Lemme 1.2.3 (Inégalité de Hölder)**.** *Si $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont respectivement dans l^p et l^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors la suite $\underline{uv}$ dont le terme général est $u_n v_n$ est dans l^1 et vérifie*

$$\sum |u_n v_n| \leq ||\underline{u}||_p ||\underline{v}||_q.$$

Démonstration. On pose $u = \left|\frac{u_n}{||\underline{u}||_p}\right|^p$ et $v = \left|\frac{v_n}{||\underline{v}||_q}\right|^q$. Le lemme 1.2.2 donne

$$u^{\frac{1}{p}}.v^{\frac{1}{q}} = \frac{|u_n|}{||\underline{u}||_p}\frac{|v_n|}{||\underline{v}||_q} \leq \frac{1}{p}\left|\frac{u_n}{||\underline{u}||_p}\right|^p + \frac{1}{q}\left|\frac{v_n}{||\underline{v}||_q}\right|^q.$$

En sommant sur n on trouve donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n v_n|}{||\underline{u}||_p ||\underline{v}||_q} \leq \frac{1}{p}\sum_n |u_n|^p \frac{1}{||\underline{u}||_p^p} + \frac{1}{q}\sum_n |v_n|^q \frac{1}{||\underline{v}||_q^q} = 1.$
D'où

$$\sum |u_n v_n| \leq ||\underline{u}||_p ||\underline{v}||_q.$$

$\square$

Lemme 1.2.4 (Inégalité de Minkowski)**.** *Si $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont dans l^p, alors $||\underline{u}+\underline{v}||_p \leq ||\underline{u}||_p + ||\underline{v}||_p$*

Démonstration. On écrit $|u_n + v_n|^p = |u_n + v_n|.|u_n + v_n|^{p-1} \leq |u_n||u_n + v_n|^{p-1} + |v_n||u_n + v_n|^{p-1}$. On applique l'inégalité de Hölder avec p et $\frac{p}{p-1}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_n |u_n + v_n|^p &\leq \sum_n |u_n||u_n + v_n|^{p-1} + \sum_n |v_n||u_n + v_n|^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_n |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n |u_n + v_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_n |v_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n |u_n + v_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \quad (1.1)\end{aligned}$$

De plus $(||\underline{u}+\underline{v}||_p)^p = \sum_n |u_n + v_n|^p = \left(\sum_n |u_n + v_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}+\frac{1}{p}}$. La majoration (1.1) permet donc de conclure la preuve du lemme. $\square$

C'est aussi l'inégalité de Minkowski qui permet de prouver que l^p est un sous-espace vectoriel.

Exercice 2
Si f est une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit qu'elle est Lipschitz s'il existe C tel que pour tout x et y,

$$|f(x) - f(y)| \leq C.|x - y|.$$

Pour f Lipschitz on définit alors $||f||_{Lip} := ||f||_\infty + \sup_{x \neq y} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$. Montrer que cela définit une norme sur l'espace des fonctions Lipschitz.

1.2.2 Normes équivalentes

Définition 1.2.5. *Soient E un $\mathbb{K}$-ev muni de 2 normes N et N'. Ces normes sont dites équivalentes s'il existe $0 < a \leq b$ tel que*

$$\forall\, x \in E,\ aN(x) \leq N'(x) \leq bN(x).$$

Exemples 8.
• Dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty,$$

donc les normes $||\ ||_2$ et $||\ ||_\infty$ sont équivalentes.

• Si on considère la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx \text{ si } x \leq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases},$$

alors $||f_n||_1 = \dfrac{1}{2n}$ et $||f_n||_\infty = 1$. Cela montre que les normes ne sont pas équivalentes dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Théorème 1.2.6. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie alors toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Admis (pour le moment). □

1.3 Ensembles ouverts et ensembles fermés

1.3.1 Boules ouvertes ou fermées

Définition 1.3.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-ev muni d'une norme $||\ ||$. Soit x un point de E. Soit $\varepsilon \geq 0$.*

On appelle boule (ouverte) de centre x et de rayon ε l'ensemble

$$B(x, \varepsilon) := \{y,\ ||x - y|| < \varepsilon\}.$$

On appelle boule ferméee de centre x et de rayon ε l'ensemble

$$B_f(x, \varepsilon) := \{y,\ ||x - y|| \leq \varepsilon\}.$$

On remarque que la boule fermée $B_f(x,\varepsilon)$ contient la boule ouverte de même rayon.

Exemple 9. Dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $B(0,1) =]-1,1[$.

Exercice 3
Dessiner les boules de centre 0 et de rayon1 dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $||\ ||_1$, $||\ ||_2$ et $||\ ||_\infty$.

Exercice 4
Si $A \subset E$, et $x \in E$ on note $x + A$ l'ensemble des points de la forme $x + y$ avec $y \in A$. Montrer que

$$B(x,\varepsilon) = 0 + B(0,\varepsilon).$$

Exercice 5
Montrer que $B_f(x,\varepsilon) \subsetneq B(x,\varepsilon')$ dès que $\varepsilon < \varepsilon'$.

Exercice 6
Montrer qu'une boule est convexe : si y et y' sont dans $B(x,r)$ alors pour tout $\alpha \in [0,1]$, $\alpha y + (1-\alpha)y'$ est aussi dans $B(x,r)$.

Exercice 7
Montrer que $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\rho) = \emptyset$ si et seulement si $||x-y|| \geq \varepsilon + \rho$.

Définition 1.3.2. *On dit qu'une partie $A \subset E$ est bornée, s'il existe R tel que*

$$A \subset B(0,R).$$

Suites dans un espace vectoriel normé

Définition 1.3.3. *Soit $(E, ||\ ||)$ un espace vectoriel normé. Soit (u_n) une suite à valeurs dans E. On dit que (u_n) converge vers l, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que tous les u_n avec $n \geq N$ sont dans $B(l,\varepsilon)$.*

Exemple 10. Toute suite dans $\mathbb{R}$ convergente pour $|\ |$ vérifie cette propriété.

Proposition 1.3.4. *Si (u_n) converge vers l alors l est unique et est appelée* **la** *limite de la suite. On notera*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

Démonstration. La raison est qu'une norme sépare les points. Si on suppose que (u_n) converge vers l et vers l' avec $l \neq l'$ alors $l - l' \neq 0$ et donc $||l-l'|| > 0$ (voir Remarque 4). On choisit alors $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}||l-l'||$.

Pour n suffisamment grand on aura $||u_n - l|| < \varepsilon$ et $||u_n - l'|| < \varepsilon$, ce qui implique

$$0 < ||l-l'|| < 2\varepsilon < \frac{2}{3}||l-l'||,$$

ce qui est impossible. □

Exercice 8
Prouver que si (u_n) converge dans $(E, ||\ ||)$ alors pour toute norme équivalente à $||\ ||$ (u_n) converge aussi pour cette norme.

Exercice 9
Montrer que dans un evn, si deux suites convergent alors toute combinaison linéaire de ces 2 suites converge.

Lemme 1.3.5. *Si (x_n) converge alors la suite est bornée.*

Démonstration. Laissée en exercice □

1.3.2 Ouverts et fermés

On se fixe est un espace vectoriel normé $(E, || \, ||)$.

Définition 1.3.6. *Un ensemble $A \subset E$ est dit ouvert si pour tout x de A, il existe une boule (ouverte) $B(x, \varepsilon)$ incluse dans A.*

Exemples 11.
Dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}^*$ et $]a, b[$ sont des ouverts.

Lemme 1.3.7. *Avec les notations précédentes, $\emptyset$ et E sont des ouverts.*

Démonstration. E ouvert est immédiat car pour tout x de E, $B(x, 1) \subset E$.

La démonstration de $\emptyset$ ouvert se fait par l'absurde. Si ce n'est pas un ouvert, alors il existe $x \in \emptyset$ et $\varepsilon > 0$, tel que $B(x, \varepsilon)$ n'est pas inclus dans $\emptyset$. Mais par définition, $\emptyset$ ne contient aucun élément donc cette dernière proposition est fausse. □

Définition 1.3.8. *Un ensemble $A \subset E$ est dit fermé si $E \setminus A$ est ouvert.*

Exemples 12.
$]-\infty, 0]$, $[0, +\infty[$, $\{0\}$ et $[a, b]$ sont des fermés.

Corollaire 1.3.9. *E et $\emptyset$ sont des fermés.*

Cela montre qu'il existe des ensembles ouverts et fermés.

Exercice 10
Montrer que $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé (dans $(\mathbb{R}, | \, |)$).

Le contraire d'être ouvert n'est pas être fermé. Il existe des ensembles ouverts et fermés. il existe des ouverts qui ne sont pas fermés et des fermés qui ne sont pas ouverts. Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts ni fermés.

Exercice 11
Montrer qu'une boule ouverte est ouverte et qu'une boule fermée est fermée.

Voici un théorème que permet de mieux comprendre l'intérêt des et la dénomination de fermés : on ne s'échappe pas d'un fermé.

Théorème 1.3.10. *Une partie A d'un espace vectoriel normé est fermée si et seulement si toute suite (u_n) convergente à valeur dans A converge dans A.*

Démonstration. On considère A fermé et une suite (u_n) à valeurs dans A qui converge vers l. Si l n'appartient pas à A, alors l appartient à l'ouvert $E \setminus A$ et i existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(l, \varepsilon) \subset E \setminus A$. Mais pour n suffisamment grand, $u_n (\in A)$ est dans $B(l, \varepsilon)$ ce qui produit une absurdité.

Réciproquement, on montre que si toute suite convergente à valeurs dans A converge dans A alors A est fermé. On prouve en fait la contraposée : si A n'est pas fermé, alors il existe une suite convergente dans A dont la limite n'est pas dans A.

Comme A n'est pas fermé, alors $E \setminus A$ n'est pas ouvert. Donc il existe l dans $E \setminus A$ tel qu'aucune boule $B(l, \varepsilon)$ ne soit incluse dans $E \setminus A$. En d'autre termes, chaque boule $B(l, \varepsilon)$ rencontre (ou contient un point de) A. On construit ainsi une suite (u_n) dans A en choisissant pour chaque $n \geq 1$ un point quelconque de

$$B(l, \frac{1}{n}) \cap A.$$

Par construction cette suite converge vers $l \notin A$ et est à valeurs dans A. Cela achève la démonstration. □

Exemple 13. On sait que si (u_n) est une suite convergente positive, alors sa limite est positive. Ici, on utilise le fait que $[0, +\infty[$ est un fermé.

Exercice 12
Montrer que si on se donne deux normes équivalentes, les ouvertes (resp. les fermés) coïncident pour ces deux normes.

Quelques propriétés sur les ouverts et les fermés

Proposition 1.3.11. *Soit $(E, \| \ \|_E)$ un evn.*

1. *Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.*
2. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*
3. *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*
4. *une union finie de fermés est un fermé.*

Démonstration. Les deux dernières propriétés sont des redites des deux premières e passant au complémentaire.

La première est assez facile à prouver. On considère une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts. Si x est dans l'union des U_i alors il est dans l'un de ces ouverts, disons U_{i_0}. Pour ε suffisamment petit on a

$$B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_i U_i.$$

La deuxième propriété est un peu plus compliquée. On commence par constater qu'il suffit de la démontrer pour l'intersection de 2 ouverts. On considère donc 2 ouverts U et V.

Si $U \cap V = \emptyset$ alors c'est un ouvert. Sinon, on choisit x dans cette intersection. Par hypothèse, il existe $\varepsilon_u > 0$ et $\varepsilon_v > 0$ tels que

$$B(x, \varepsilon_u) \subset U \quad B(x, \varepsilon_v) \subset V.$$

Alors pour $\varepsilon = \min(\varepsilon_u, \varepsilon_v)$, $B(x, \varepsilon) \subset U \cap V$. □

L'exemple suivant montre que l'hypothèse finie est essentielle :

Exemple 14. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}[= \{0\}$ qui n'est pas ouvert.

1.4 Intérieur, adhérence, propriétés

1.4.1 Définitions

Théorème 1.4.1 (et définition). *Soient $(E, ||\ ||_E)$ un evn et A une partie de E.*

1. *Le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A existe. C'est l'union de tous les ouverts incus dans A. Cet ouvert s'appelle l'intérieur de A et se note $\mathring{A}$.*
2. *Le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) qui contient A existe. C'est l'intersection de tous les fermés qui contiennent A. Il s'appelle adhérence (ou fermeture) de A et se note $\overline{A}$.*

Démonstration. La Proposition 1.3.11 montre que l'union de tous les ouverts inclus dans A est un ouvert. Par définition, il contient tous les ouverts inclus dans A donc il est unique et le plus grand.

De même l'intersection de tous les fermés qui contiennent A est un fermé. Il est contenu dans tout fermé qui contient A, donc est le plus petit des fermés qui contiennent A. □

On retiendra

$$\boxed{\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}.}$$

Exemples 15.

Affirmation 1. L'adhérence de la boule ouverte $B(x, \varepsilon)$ et la boule fermée $B_f(x, \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.

En effet $B_f(x, \varepsilon)$ est un fermé qui contient la boule ouverte. Ainsi

$$\overline{B(x, \varepsilon)} \subset B_f(x, \varepsilon).$$

Pour montrer l'inclusion inverse, on montre qu'un point qui n'est pas dans $\overline{B(x, \varepsilon)}$ n'est pas dans $B_f(x, \varepsilon)$. Soit donc $y \notin \overline{B(x, \varepsilon)}$. Alors il existe un fermé F qui contient $B(x, \varepsilon)$ et qui ne contient pas y. Le point y est donc dans le complémentaire de F qui est ouvert. Ainsi il existe $\rho > 0$ tel que $B(y, \rho) \cap F = \emptyset$. Cela implique que $B(x, \varepsilon) \cap B(y, \rho) = \emptyset$. Cela entraine $||y - x|| \geq \rho + \varepsilon > \varepsilon$. Ainsi y n'appartient pas à $B_f(x, \varepsilon)$.

Exercice 13
Donner $\overline{[a, b[}$.

Caractérisations

Proposition 1.4.2. *Un point x est dans $\mathring{A}$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$.*

Démonstration. Si $B(x,\varepsilon) \subset A$, alors x appartient à un ouvert (la boule) contenu dans A, donc à l'union de ces ouverts qui est $\mathring{A}$.

Réciproquement, si x appartient à $\mathring{A}$, alors il appartient à l'union de tous les ouverts inclus dans A, donc à l'un deux. On l'appelle U. Comme c'est un ouvert, il existe ε tel que

$$x \in B(x,\varepsilon) \subset U \subset A.$$

□

Proposition 1.4.3. *Un point x est dans $\overline{A}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap A$ n'est pas vide.*

Démonstration. Pour chaque $n \geq 1$, on choisit $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Par construction la suite (x_n) converge vers x et est à valeur dans A. C'est donc une suite à valeurs dans le fermé $\overline{A}$ et donc sa limite est également dans $\overline{A}$.

La réciproque se fait par contraposée. On suppose que $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Alors x n'appartient pas à $E \setminus B(x,\varepsilon)$ qui est un fermé qui contient A. Donc x n'est pas dans l'intersection des fermés contenant A, donc x n'est pas dans $\overline{A}$. □

Corollaire 1.4.4. *Le point x est dans $\overline{A}$ si et seulement si il existe une suite de point de A qui converge vers x.*

Démonstration. Prendre les $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. □

Corollaire 1.4.5. *Le point x est dans $\overline{A}$ si et seulement si $d(x, A) = 0$.*

1.4.2 Intérieurs, adhérences et relations binaires entre les ensembles

Commençons par deux relations simples :

$$\boxed{A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B} \text{ et } \overline{A} \subset \overline{B}.}$$

Les relations par passage au complémentaire sont un peu plus complexes :

Théorème 1.4.6. *Soit A une partie de E. Alors $\overline{A} = E \setminus \overset{\circ}{\widehat{E - A}}$.*

Démonstration. Notons $B := E \setminus A$. Si x est dans $\overline{A}$, alors pour tout ε, $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et donc aucune boule $B(x,\varepsilon)$ n'est incluse dans B. Cela signifie que x n'est pas dans $\mathring{B}$.

Réciproquement, si x n'est pas dans $\mathring{B}$, toute boule $B(x,\varepsilon)$ rencontre $E \setminus B = A$. □

Propriétés

— $A = \mathring{A}$ si et seulement si A est ouvert.

> *Si $A \subset \mathring{A}$ alors A est contenu dans le plus grand ouvert qu'il contient, il est donc égal à cet ouvert donc est ouvert. Si A est ouvert, il est bien le plus grand ouvert qu'il contient.*

— $A = \overline{A}$ si et seulement si A est fermé.

> *Si A est fermé, il est le plus petit fermé qui le contient. Réciproquement, s'il est le plus petit fermé qui le contient il est fermé.*

— $\boxed{E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}}$ (Théorème 1.4.6).

— $\boxed{\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}}$.

> *Si x est dans $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$, il existe ε tel qu'on ait $x \in B(x, \varepsilon) \subset A \cap B$. Donc $B(x, \varepsilon)$ est dans A et dans B et x est dans $\mathring{A}$ et dans $\mathring{B}$. Réciproquement si x est dans $\mathring{A}$ et dans $\mathring{B}$ on peut trouver une boule $B(x, \varepsilon)$ qui sera dans A et dans B donc x est dans $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.*

— $\boxed{\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}}$.

> *$\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ sont des ouverts respectivement inclus dans A et B, donc leur union est incluse dans $A \cup B$ dans dans le plus grand ouvert contenu dans $A \cup B$.*

— L'inclusion inverse n'a pas forcément lieu, comme le montre l'exemple $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

— par passage au complémentaire on obtient $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$ et $\boxed{\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}}$.

Exercice 14
Montrer ces deux dernières propriétés à l'aide de la caractérisation par les boules des adhérences.

1.4.3 Parties denses

Définition 1.4.7 (et proposition)**.** *Une partie A de E est dite dense si elle vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :*

1. *$\overline{A} = E$,*
2. *Tout ouvert (non vide) de E rencontre A.*

Démonstration. Supposons que tout ouvert de E rencontre A. considérons x dans E. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, la boule (ouverte) $B(x, \varepsilon)$ rencontre A, donc x est dans $\overline{A}$. Cela montre $E \supset \overline{A}$, l'autre inclusion étant immédiate.

Réciproquement, si $\overline{A} = E$, si U est une ouvert de E (non vide) alors il contient un point x et on peut trouver une boule $B(x, \varepsilon)$ incluse dans U. cette boule rencontre A, donc U rencontre A. $\square$

Exemples 16.
$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont dense dans $\mathbb{R}$ (pour la topologie usuelle).

Le théorème de Stone-Weierstrass stipule que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur un segment pour la norme $|| \, ||_\infty$.

La théorie de séries de Fourier résulte de la densité (mais pour une norme plus compliquée) de l'espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto e^{2i\pi kx}$ dans les fonctions 1-périodiques.

Chapitre 2

Compacité

Dans tout ce chapitre on se fixe un espace vectoriel normé $(E, || \ ||_E)$.

2.1 Définition séquentielle

2.1.1 Rappels sur les suites

Définition 2.1.1. *Soit (x_n) une suite dans E. On appelle suite extraite (également appelée sous-suite) toute suite (y_n) de la forme*

$$y_n = x_{\varphi(n)},$$

où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

On appelle valeur d'adhérence de la suite (x_n) toute limite d'une suite extraite.

Exemple 17. On parle de la suite extraite des termes pairs définie spar $y_n = x_{2n}$.

Exercice 15
Montrer que se fixer une suite extraite signifie choisir une infinité de termes x_n.

Exemple 18. La suite dans $\mathbb{R}$, définie par $x_n = (-1)^n$ admet exactement deux valeurs d'adhérence : ± 1.

Proposition 2.1.2. *Si (x_n) converge vers l alors son unique valeur d'adhérence est l.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

Attention, la réciproque est fausse. Si une suite n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, elle ne converge pas nécessairement (sauf dans un compact). La suite définie par $x_{2n} = 1$, $x_{2n+1} = n$ dans $\mathbb{R}$ est un exemple.

2.1.2 Définition et premières propriétés et caractérisation en dimension finie

Définition 2.1.3. *Soit $(E, || \ ||_E)$ un evn. Une partie $K \subset E$ est dite compacte si toute suite à valeurs dans K admet une valeur d'adhérence dans K.*

Exemples 19.
Un singleton $\{x\}$ est compact. Le théorème de Bolzano Weierstrass dit que dans $\mathbb{R}$ tout intervalle $[a, b]$ est compact. L'intervalle $]0, 1]$ n'est pas compact car la suite des $\frac{1}{n}$ converge vers 0 qui n'est pas dans l'ensemble.

Proposition 2.1.4. *Un compact est fermé et borné.*

Démonstration. Commençons par montrer qu'un compact est fermé. Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle des fermés. Soit (x_n) une suite à valeurs dans K qui converge vers x. Alors (x_n) admet une valeur d'adhérence dans K, c'est à dire qu'une suite extraite converge vers un point y de K. Mais une suite extraite d'une suite convergente converge vers la limite, donc $y = x$ et x est dans K.

Montrons que si K n'est pas borné alors K n'est pas compact. On construit une suite (x_n) en choisissant pour chaque n, un terme x_n dans K de norme supérieure à n. C'est possible puisque K n'est pas borné. Ainsi la suite n'est pas bornée, ni aucune de ses suites extraites et le Lemme 1.3.5 montre qu'elle ne peut pas avoir de valeurs d'adhérences. □

Théorème 2.1.5. *Si E est de dimension finie, alors les compacts de E sont exactement les ensembles fermés et bornés.*

Remarque 5. Notez que toutes les normes étant équivalentes, il n'est pas nécessaire de préciser pour quelle norme. ■

Avant de faire la preuve de ce théorème on a besoin d'une lemme bien utile :

Lemme 2.1.6. *Si K est un compact et F est un fermé inclus dans K, alors F est aussi un compact.*

Démonstration. On se fixe une suite à valeurs dans F. C'est également une suite à valeurs dans K, donc on peut en extraire une sous-suite convergente. Cette sous-suite est à valeurs dans le fermé F et converge, donc sa limite est dans F. □

Preuve du Théorème 2.1.5. Il suffit de démontrer qu'un fermé borné est un compact. Pour simplifier, on suppose que $E = \mathbb{R}^d$, car on peut se ramener à ce cas en considérant une base.

On considère donc une partie K fermée et bornée. On peut donc l'inclure dans une boule $B(0, R)$ pour la norme $|| \, ||_\infty$. Compte tenu du lemme 2.1.6, il suffit de démontrer que la boule est compacte.

On considère maintenant une suite dans cette boule. Elle s'écrit sous la forme :

$$x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,d}).$$

Cela définit une suite $(x_{n,1})$ à valeurs dans $[-R, R]$ qui est compacte. Donc on peut choisir une suite extraite qui converge. Pour simplifier, on note $(x_{\varphi(n),1})$ cette suite. La suite $(x_{\varphi(n),2})$ est aussi à valeurs dans $[-R, R]$ donc admet une valeur d'adhérence. En procédant ainsi de suite jusqu'à l'indice d, on construit une suite extraite qui converge car chaque "suite-coordonnée" converge. □

Remarque 6. Une lemme assez subtile de Riesz montre qu'en dimension infinie une boule unité n'est jamais compacte. Cela signifie qu'en dimension infinie, il ne suffit pas que l'ensemble soit fermé et borné pour être compact. ■

Le Lemme 2.1.6 permet aussi de démontrer une propriété pratique sur les compacts :

Proposition 2.1.7. *Une intersection quelconque de compacts est encore compacte.*

Démonstration. Ce sont des compacts donc des fermés donc l'intersection est fermée dans un compact donc compacte. □

2.1.3 Quelques conséquences sur les suites

Limites et valeurs d'adhérence

Théorème 2.1.8. *Une suite dans un compact converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.*

En particulier, en dimension finie, une suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Démonstration. Une suite convergente admet une unique valeur d'adhérence. Montrons donc que cette propriété implique à son tour la convergence. On considère donc (x_n) à valeurs dans un compact K et x son unique valeur d'adhérence.

Si (x_n) ne converge pas vers x, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'une infinité de termes. ela suite sont en dehors de la boule $B(x, \varepsilon)$. L'ensemble $E \setminus B(x, \varepsilon)$ est un fermé et donc $K' := E \setminus B(x, \varepsilon) \cap K$ est un compact (fermé dans K) qui contient une infinité de termes de la suite (x_n). Cela fournit une nouvelle suite (extraite de la première) qui admet une valeur d'adhérence dans K' donc dans K. Cette valeur n'est pas x et cela contredit l'hypothèse.

Ainsi (x_n) converge vers x. □

Suites de Cauchy

On rappelle une notion déjà vue en topologie 1.

Définition 2.1.9. *Une suite (x_n) est dite de Cauchy (ou vérifie le critère de Cauchy) si*

$$\forall \varepsilon,\ \exists N,\ \forall p,\ q \geq N, ||x_p - x_q||_E < \varepsilon.$$

Proposition 2.1.10. *Une suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Laissée en exercice. □

Il existe des espaces avec des suites de Cauchy qui ne sont pas convergentes. Par exemple le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}$.

Théorème 2.1.11. *Une suite de Cauchy dans un compact converge.*

Démonstration. La preuve est basée sur le fait suivant :

Affirmation 2. Une suite de Cauchy admet au plus une unique valeur d'adhérence.

Preuve de l'affirmation par l'absurde. Si elle en admet 2 différentes, a et b, alors deux suites extraites convergent vers ces 2 termes. En prenant $\varepsilon = \frac{1}{3}||a-b||_E$ on nie la propriété de Cauchy avec cet ε. □

Une suite de Cauchy dan sun compact admet donc au plus une valeur d'adhérence et au moins une. Donc elle en admet une unique donc converge. □

2.2 Définition à l'aide des recouvrement d'ouverts

Définition 2.2.1. *Si A est une partie de E, on appelle recouvrement de A par des ouverts, toute famille d'ouverts (U_i) telle que*

$$A \subset \bigcup_i U_i$$

Exemples 20.
La famille $]n, n+2[$ avec $n \in \mathbb{Z}$ recouvre $\mathbb{R}$.

La famille des boules $B(x, 7)$ avec x décrivant l'ensemble A recouvre A.

$\mathbb{Q}$ étant dénombrable, on peut construire un recouvrement de $\mathbb{Q}$ par des boules ouvertes dont la longueur totale est aussi petite que voulue.

Proposition 2.2.2. *Soit $(E, || \ ||_E)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *De tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*
2. *Soit (F_i) une famille de fermés telle que $\cap_i F_i \cap A = \emptyset$. Alors il existe $F_{i_0}, \ldots F_{i_n}$ tels que $F_{i_0} \cap F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n} \cap A = \emptyset$.*

Démonstration. Il suffit de passer aux complémentaires. Si on suppose (1) vrai alors considère une suite (F_i) de fermés tels que $\cap_i F_i \cap A = \emptyset$. On pose $U_i = E \setminus F_i$. C'est un ouvert. La propriété $\cap_i F_i \cap A = \emptyset$ signifie que A est inclus dans $\bigcup_i U_i$, *i.e.*, qu'on a un recouvrement de A par des ouverts. On en tire un sous-recouvrement fini $u_{i_0}, \ldots U_{i_n}$ et

$$A \subset \cup U_{i_j}$$

signifie $\cap F_{i_j} \cap A = \emptyset$.

Réciproquement, si on suppose (2) vraies, on choisit un recouvrement par des ouverts $A \subset \bigcup_i U_i$. On pose $F_i := E \setminus U_i$ qui est donc fermé. L'hypothèse s'écrit

$$\bigcap F_i \cap A = \emptyset.$$

On en tire une intersection finie vide des F_i (avec A) ce qui donne un recouvrement finis par des ouverts U_i. □

Théorème 2.2.3. *Une partie K est compacte si et seulement si de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

> Attention : une mauvaise façon de comprendre le théorème est de dire qu'une partie est compacte si et seulement si on peut trouver un recouvrement fini par des ouverts. Ce n'est pas ce que dit le théorème.

Démonstration. La preuve est reportée à plus tard, elle est technique et nécessite la notion de complétude.

□

Chapitre 3

Continuité-Homéomorphismes

3.1 Définition avec les ouverts et les fermés

3.1.1 Définition. Caractérisation avec les ouverts et les fermés

Dans tout ce chapitre on se donne deux evn $(E, ||\ ||_E)$ et $(F, ||\ ||_F)$. On considère une application $f : E \to F$. On rappelle la déifinition vue en Topologie 1 :

Définition 3.1.1. *La fonction $f : E \to F$ est dite continue en $x \in E$ si pour toute suite (x_n) qui converge vers x, la suite image $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$ (dans F). La fonction f est dite continue si elle est continue en chacun de ses points.*

Théorème 3.1.2. *Soit$f : E \to F$. Alors f est continue si et seulement si elle vérifie l'une des propriété équivalentes suivantes :*

1. *Pour tout $U \subset F$ ouvert, $f^{-1}(U)$ est ouvert (dans E).*
2. *Pour tout $G \subset F$ fermé, $f^{-1}(G)$ est un fermé de E.*

Démonstration. $\boxed{\Longrightarrow}$ Comme un fermé est le complémentaire d'un ouvert et que l'on a

$$f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A),$$

l'équivalence des deux propriétés est immédiate.

Il suffit donc de prouver l'assertion sur les ouverts ou sur les fermés. Notre définition de continuité repose (pour le moment) sur les suites,il est donc souvent plus pratique de travailler avec des fermés.

Soit K un fermé de F. On suppose que $f^{-1}(K)$ n'est pas vide. Soit (x_n) une suite dans $f^{-1}(K)$ qui converge (dans E) vers un point x. Alors $(f(x_n))$ est une suite à valeurs dans le fermé K convergente vers $f(x)$ (ici on utilise la continuité). Donc par la Proposition 1.4.3, $f(x)$ est dans K, donc x est dans $f^{-1}(K)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E. On veut montrer que f est continue. La définition des ouverts permet de nous ramener aux boules :

Si y appartient à V ouvert de F, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon)$ soit incluse dans V. Comme $B(y, \varepsilon)$ est une boule ouverte, $f^{-1}(B(y, \varepsilon))$ est aussi un ouvert dans E. Supposons que l'on ait $f(x) = y$. Alors x est dans l'ouvert $f^{-1}(B(y, \varepsilon))$ et donc il existe $\rho > 0$ tel que

$$B(x, \rho) \subset f^{-1}(B(y, \varepsilon)).$$

Ceci implique qu'on a la propriété :

$$\forall x,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \rho > 0,\ /\ ||x' - x||_E < \rho \Longrightarrow ||f(x') - f(x)||_F < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration. Si (x_n) converge vers x, pour $\varepsilon > 0$ fixé, on construit ρ donné par (3.1). À partir d'un certain rang, tous les termes x_n sont dans $B(x, \rho)$ ce qui entraine que tous les termes $f(x_n)$ sont dans $B(y, \varepsilon)$. Donc f est bien continue (selon la définition 3.1.1). □

Remarque 7. On reconnaîtra dans (3.1) la définition "classique" de la continuité (dans $(\mathbb{R}, |\quad|)$ par exemple). ■

3.1.2 Images directes d'ouverts ou de fermés

On aimerait que la continuité se caractérise par le fait que les images d'ouvert (resp. fermés) sont ouvertes (reps. fermées). C'est cependant faux comme le montre l'exemple :

Exemple 21. $E = F = \mathbb{R}$ munis de $|\quad|$, $f(x) = \sin x$. L'intervalle $]0, 2\pi[$ est ouvert et son image est $[-1, 1]$ qui n'est pas ouvert. De même si on pose $g(x) = (1 - e^{-x^2}) \sin x$, l'image du fermé $[0, +\infty[$ est $]-1, 1[$ qui n'est pas fermé.

Mais si la propriété n'est pas en général vraie, rien n'interdit qu'elle le soit parfois. Ainsi, l'image par sin du fermé $[0, 2\pi]$ est le fermé $[-1, 1]$ et l'image de l'ouvert $]0, \frac{\pi}{2}[$ est l'ouvert $]0, 1[$.

À défaut de préserver les images directes, on a cependant une propriété sur les adhérences :

Proposition 3.1.3. *Si $f : E \to F$ est continue, alors pour toute partie $A \subset E$,*

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Démonstration. Il suffit de se souvenir que $x \in \overline{A}$ est caractérisé par l'existence d'une suite (x_n) dans A qui converge vers x. La suite image définie par $y_n = f(x_n)$ est à valeurs dans $f(A)$ et converge (par continuité) vers $y := f(x)$. Donc $f(x)$ est dans $\overline{f(A)}$. □

3.2 Compacts et continuité

3.2.1 Image directe d'un compact

Théorème 3.2.1. *Soient $(E, ||\ ||_E)$ et $(F, ||\ ||_F)$ deux evn. Soient $f : E \to F$ continue et $K \subset E$ un compact de E. Alors $f(K)$ est un compact de K.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite à valeurs dans $f(K)$. Pour chaque n il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. La suite (x_n) admet une valeur d'adhérence $K \ni x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$. La continuité montre que $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $y = f(x)$. □

Par contre l'image réciproque d'un compact n'a pas de raison d'être compacte. Ainsi, si $E = F = \mathbb{R}$ et $f = \sin$ l'image réciproque du compact $[-1, 1]$ est $\mathbb{R}$ tout entier qui n'est pas compact (puisque non borné).

3.2.2 Applications

Proposition 3.2.2. *Soient K un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f(K)$ est bornée et f atteint ses bornes.*

Démonstration. L'image $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc un fermé borné. Cela signifie que f est bornée. Si $a = \sup\{f(x),\ x \in K\}$, alors il existe une suite (y_n) à valeurs dans $f(K)$ qui converge vers a. Cela signifie que a est dans l'adhérence de $f(K)$ qui est un fermé. Donc il existe $x \in K$ tel que $a = f(x)$. On procède de même pour la borne inf. □

Remarque 8. Cette proposition est le point clef pour démontrer le théorème de Rolle. Ce théorème est alors celui qui permet de prouver tout le calcul différentiel. ■

Corollaire 3.2.3. *Si f est une fonction continue définie sur $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$, alors il existe $\varepsilon > 0$ telle que pour tout $x \in K$,*

$$f(x) \geq \varepsilon > 0.$$

Démonstration. f est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc x_0 dans K tel que

$$\forall x \in K, f(x) \geq f(x_0).$$

Comme $f(x_0) > 0$, on peut poser $\varepsilon = f(x_0)$. Il satisfait la double inégalité voulue. □

3.2.3 Uniforme continuité

Définition 3.2.4. *Une fonction continue $f : E \to F$ est dite uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon\, \exists \rho,\ \forall x, x'\ ||x - x'||_E < \rho \Longrightarrow ||f(x) - f(x')||_F < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Théorème 3.2.5 (Heine)**.** *Soit $f : K \to F$ une application continue d'un compact K vers F. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. la continuité permet de trouver pour chaque x de K un réel ρ_x tel que

$$y \in B(x, \rho_x) \Longrightarrow ||f(x) - f(y)||_F < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela donne un recouvrement de K par les boules ouvertes $B(x, \frac{1}{2}\rho_x)$. On en extrait un sous-recouvrement fini $B(x_1, \frac{1}{2}\rho_{x_1}) \ldots B(x_n, \frac{1}{2}\rho_{x_n})$ et on considère

$$\rho = \frac{1}{2}. \min \rho_i.$$

Si x et y vérifient $d(x, y) < \rho$, alors x est dans une boule $B(x_i, \frac{1}{2}\rho_{x_i})$ et donc y est dans la boule $B(x_i, \rho_{x_i})$. Ainsi

$$||f(x) - f(y)||_F \leq ||f(x) - f(x_i)||_F + ||f(x_i) - f(y)||_F < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

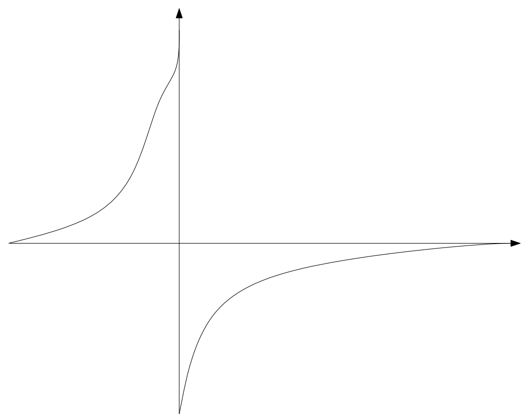

Figure 3.1 – Application continue bijective à réciproque non-continue

Applications : Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier sur un segment. Intégrale de Riemann.

3.3 Homéomorphismes

Si $f : E \to F$ est continue et bijective, rien ne garantit que la bijection réciproque f^{-1} est aussi continue, comme le montre l'exemple suivant :

L'application f est définie sur $[-1, 0[\cup]0, +\infty[$, est strictement croissante sur chaque intervalle et vérifie

$$f([-1, 0[) = [0, +\infty[, : f(]0, +\infty[) =]-\infty, 0[.$$

Elle est continue bijective de $\mathcal{D}_f$ sur $\mathbb{R}$ mais la bijection réciproque n'est pas continue en 0. Cela justifie une définition supplémentaire :

Définition 3.3.1. *Une application $f : E \to F$ est un homéomorphisme si c'est une bijection* bi-continue*, c'est à dire telle que f et f^{-1} sont continues.*

Deux espaces $(E, || \, ||_E)$ et $(F, || \, ||_F)$ sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de l'un vers l'autre.

Deux parties A et B de $(E, || \, ||_E)$ sont dites homéomorphes s'il existe une application bijective et bicontinue entre A et B.

3.3.1 Exemples

Intervalles de $\mathbb{R}$

• *Tous les intervalles* **ouverts** *de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.* Soient deux intervalles $I_1 =]a, b[$ et $I_2 =]c, d[$. s'ils sont de longueur fini chacun, on trouve une translation et une homothétie qui envoie I_1 sur I_2. Sil'un est de longueur infinie, on le transforme (de façon homéomorphique) en un intervalle de longueur finie via l'application arctan. On est ramené au cas précédent.

• *Les deux intervalles $]a, b[$ et $[c, d]$ ne sont pas homéomorphes si même $]a, b]$ et $[c, d]$.* La raison est que l'un est compact et pas l'autre. Or l'image d'un compact par une application continue est compacte.

Projections stéréographiques

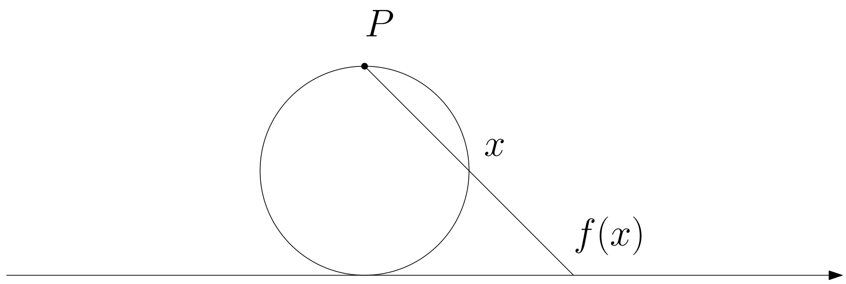

FIGURE 3.2 – Projection stéréographique de $\mathbb{S} \setminus \{P\}$ sur $\mathbb{R}$

Entre un cercle et un carré dans le plan

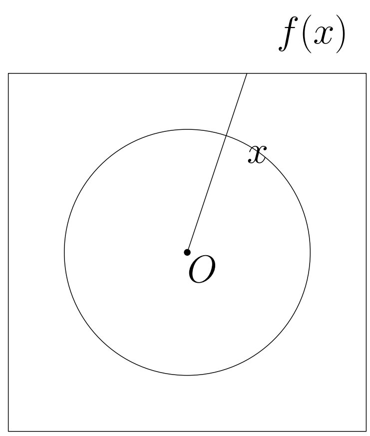

FIGURE 3.3 – Homéomorphsime entre un cercle et un carré

Chapitre 4

EVN complets : espaces de Banach

4.1 Définition, exemples et une description

Définition 4.1.1. *Soit* $(E, || \ ||_E)$ *un evn. soit* (x_n) *une suite dans* E. *On dit que la suite est de Cauchy si elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon, \ \exists N, \ \forall p, q \geq N, \ ||x_p - x_q||_E < \varepsilon.$$

Exemple 22. Toute suite convergente est de Cauchy. Le contraire est *a priori* faux. On a vu par exemple que $\mathbb{R}$ s'obtient comme le complété de $\mathbb{Q}$ donc il existe des suites rationnelles de Cauchy qui ne sont pas convergentes.

Définition 4.1.2. *Un evn est dit complet si toute suite de Cauchy converge. Un evn complet s'appelle un espace de Banach.*

Théorème 4.1.3. *Tout evn de dimension finie est un Banach.*

Démonstration. Il n'est pas nécessaire de préciser pour quelle norme puisqu'elles sont équivalentes. Pour montrer qu'un espace de dimension finie est complet, il suffit de constater qu'une suite de Cauchy est bornée, donc admet au moins une valeur d'adhérence donc converge. □

4.1.1 $(\mathcal{C}^0([0,1]), || \ ||_\infty)$ est un Banach

Soit (f_n) une suite de Cauchy pour $(\mathcal{C}^0([0,1]), ||||_\infty)$. Pour x dans $[0,1]$ la suite numérique $(f_n(x))$ est donc de Cauchy. Elle converge vers une valeur limite notée $f(x)$. On a donc une suite (f_n) d'applications continues qui converge uniformément vers une application f. On sait alors que f est continue.

4.1.2 $(\mathcal{C}^{0+1}([0,1]), || \ ||_{Lip})$ est un Banach

Soit (f_n) une suite d'applications Lipschitz qui est de Cauchy pour la norme $|| \ ||_{Lip}$. Elle est donc de Cauchy pour $|| \ ||_\infty$ donc la suite converge vers une application f qui est continue.

Si ε est fixé, la condition de Cauchy entraine

$$\exists N, \ \forall x \, \forall y \, \forall n, p \geq N \ |f_n(x) - f_n(y) + f_p(y) - f_p(x)| \leq \varepsilon |x - y|.$$

L'inégalité triangulaire permet alors d'obtenir $|f_p(x) - f_p(y)| \leq C_{f_n}|x-y| + \varepsilon|x-y|$. En faisant $p \to +\infty$ on montre que f est aussi Lipschitz. Cela permet de passer à la limite dans $|f_n - f_p|_{Lip}$ et montre que la convergence est dans Lip.

4.1.3 Fermetures des sous-espaces vectoriels

Proposition 4.1.4. *Soient $(E, ||\ ||)$ un Banach et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F est fermé.*

Démonstration. On considère une suite (x_n) dans F qui converge. On note l sa limite. La suite est donc de Cauchy. On choisit une base finie $e_1, \dots e_p$ de F et on considère la norme $||\ ||_\infty$ dans F. Toutes les normes sont équivalentes dans F donc la suite (x_n) est également de Cauchy pour $||\ ||_\infty$. Elle converge donc pour $||\ ||_\infty$ vers une limite l' qui est dans F. L'équivalence des normes (à nouveau) montre (x_n) converge vers l' pour la norme $||\ ||$ donc $l = l'$ et l est dans F. □

Remarque 9. On remarquera que le résultat est encore vrai si on ne suppose pas que E est complet. Ce que nous utilisons c'est d'une part qu'une suite convergente et de Cauchy (toujours vrai même sans l'hypothèse de complétude) et l'équivalence des normes en dimension finie (toujours vraie également). Ainsi un sous-espace de dimension finie dans un evn est nécessairement complet et fermé. ■

4.1.4 Prolongement par continuité

Proposition 4.1.5. *Soient $(E, ||\ ||_E)$ et $(F, ||\ ||_F)$. deux evn. On suppose que F est un Banach. Soient A une partie de E et $f : A \to F$ une fonction continue. Soit $a \in \overline{A}$.*

Alors f admet un prolongement par continuité en a si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\rho > 0$ tel que

$$z, z' \in B(a, \rho) \Longrightarrow ||f(z) - f(z')||_F < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Démonstration. Supposons que f admette un prolongement par continuité en a. Alors f est continue en a et donc pour tout ε, il existe ρ tel que $y \in B(a, \rho)$ entraine $f(y) \in B(f(a), \frac{\varepsilon}{2})$. On a donc

$$z, z' \in B(a, \rho) \Longrightarrow ||f(z) - f(z')||_F < \varepsilon.$$

Réciproquement, on considère une suite (x_n) qui converge vers a. La suite (f_{x_n}) est de Cauchy et donc converge. On note cette limite $f(a)$.

Si (y_n) est une autre suite qui converge vers a, pour ε, on choisit ρ comme dans (4.1). Pour n suffisamment grand, x_n et y_n sont dans $B(a, \rho)$ et donc $f(y_n)$ est dans la boule $B(f(x_n), \varepsilon)$. A nouveau, si n est suffisamment grand, cette boule est incluse dans $B(f(a), 2\varepsilon)$, ce qui prouve que $f(y_n)$ converge vers $f(a)$. Donc le prolongement de f est une application continue en a. □

4.2 Séries et critère de Cauchy.

Pour une suite (u_n) à valeurs dans l'espace E, on dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si la suite définie par

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

converge. On dit que la série converge absolument si la série réelle $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ converge. Dans un Banach on peut utiliser le critère de Cauchy pour confirmer ou infirmer la convergence d'une suite ; Cela a donc une conséquence pratique pour les séries :
Si (u_n) est à valeurs dans un Banach, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon,\ \exists N\ \forall n \geq N, \forall p \geq 0, \|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\| < \varepsilon.$$

Théorème 4.2.1. *Une série à valeurs dans un Banach qui est absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \|u_k\|.$$

□

On peut trouver des contre-exemples : la suite définie par $u_n = f_{n+1} - f_n$, où les f_k sont celles du premier exemple du chapite, ne peut pas donner une série convergente car cela équivaudrait à la convergence de la suite (f_n). Par ailleurs la série est absolument convergente car $\|u_n\| \sim \frac{1}{n^2}$.

Application : exponentielle de matrice.

On choisit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme matricielle. On pose

$$e^A \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Cette série converge car elle est absolument convergent et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un Banach (car de dimension finie). On a en effet $\sum \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$.
Ceci permet de résoudre des systèmes différentiels :

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix},$$

où A est une matrice $n \times n$. Les solutions sont du type $Y(t) = e^{t.A} \times Y_0$.

4.3 Applications contractantes

Théorème 4.3.1. *Soit $(E, || \ ||_E)$ un Banach. Soit f une application de E dans E qui vérifie*

$$\forall x, y \in E, \ ||f(x) - f(y)||_E \leq k.||x - y||_E,$$

avec k une constante dans $]0, 1[$. Alors il existe un unique point fixe de f, c'est à dire un unique x tel que $f(x) = x$.

Remarque 10. Ce théorème est le point clef pour démontrer les théorèmes de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles ou encore le théorème de la fonction implicite et/ou de l'inversion locale. ■

Démonstration. L'unicité découle du fait que si $f(x) = x$ et $f(y) = y$ alors

$$||x - y||_E = ||f(x) - f(y)||_E \leq k||x - y||_E.$$

Cela donne alors $(1 - k)||x - y||_E \leq 0$, ce qui ne peut être possible que si $||x - y||_E = 0$, *i.e.*, $x = y$.

L'existence découle de la construction d'une suite par induction : on choisit n'importe quel point x_0 puis ont définit

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Un calcul montre que la suite (x_n) est de Cauchy donc convergente. Le point limite x est un point fixe par continuité de f. □

Annexe A

Théorème de Stone-Weirstrass

Théorème A.0.1. *Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Alors il existe une famille de polynômes qui converge uniformément vers f.*

Remarque 11. En d'autres termes on dit que l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients réels est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1])$. ■

Démonstration. Il existe plusieurs preuves de ce théorème. On en trouvera une très générale dans le livre de Dixmier *Topologie générale*. Il existe une très jolie preuve qui utilise les polynômes de Bernstein et découle de la linéarité de la variance pour des variables aléatoires indépendantes.

Nous donnons ici une autre preuve qui utilise le produit de convolution.

On considère une suite (K_n) d'applications continues positives et nulles en dehors de $[-1,1]$ vérifiant

(i) Pour tout n, $\int_{\mathbb{R}} K_n(x)dx = 1$,

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\delta > 0$ il existe N tel que pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} K_n(t)dt \leq \varepsilon.$$

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose

$$f * K_n(x) = \int_0^1 f(t)K_n(x-t)dt.$$

Le changement de variable $u = x - t$ $f * K_n(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} f(x-u)K_n(u)du$. Pour simplifier les écritures et les calculs on prolonge f par 0 en dehors de $[0,1]$ et K_n par 0 en dehors de $[-1,1]$. Les intégrales sont donc calculées sur $\mathbb{R}$ mais en réalité elles n'ont une contribution non nulle que sur des intervalles bornés.

Soit $\varepsilon > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(x) - f * K_n(x) &= f(x).1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)K_n(u)du \\
&= f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(u)du - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)K_n(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} K_n(u)\left(f(x) - f(x-u)\right)du \\
&= \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} K_n(u)(f(x)-f(x-u))du + \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u)(f(x)-f(x-u))du.
\end{aligned}$$

La fonction f est continue sur un compact donc uniformément continue. Il existe $\delta > 0$ tel que $|y-z| \leq \delta$ entraine $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. On se fixe un tel δ. La fonction f est continue donc bornée (par M). Ainsi le premier terme de droite dans la dernière égalité est majoré en valeur absolu par

$$2M.\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} K_n(u)du$$

qui peut-être rendu plus petit que ε si n est suffisamment grand (*i.e.,* $n \geq N$). Notons que dans ce cas, le second terme à droite dans la dernière égalité est majoré en valeur absolue par ε puisque $1 - \varepsilon \leq \int_{-\delta}^{\delta} K_n(u)du \leq 1$. Ainsi, $|f(x) - f * K_n(x)| < 2\varepsilon$ pour tout x et pour tout $n \geq N$. Cela prouve que $f * K_n$ converge uniformément vers f.

Si on choisit $K_n(x) = a_n(1-x^2)^n$ sur $[-1, 1]$, $K_n \equiv 0$ en dehors de cet intervalle, et a_n tel que $\int_{-1}^{1} K_n(t)dt = 1$, alors chaque K_n est un polynôme et donc un calcul direct montre que $f * K_n(x)$ est un polynôme en x.

On laisse en exercice la démonstration du fait que ces K_n vérifient l'hypothèse (ii) demandée en début de démonstration [1].

□

Remarque 12. Le théorème montre qu'un sous-espace vectoriel de dimension infinie n'est pas nécessairement fermé dans un Banach. ■

1. On montre que $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n dx \geq e^{-2}/\sqrt{n}$ si n est assez grand. Donc a_n est au moins en $Cn^{-1/2}$. Par ailleurs $\int_\delta^1 (1-x^2)^n dx \leq (1-\delta^2)^n$ qui est exponentiellement petit.

Annexe B

Retour sur la compacité

Nous allons maintenant donner la démonstration du théorème 2.2.3

On considère K qui a la propriété que de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. On se fixe une suite (x_n) dans K et on va construire une suite extraite convergente.

On recouvre K par un nombre fini de boules de rayon 1. Une de ces boules contient une infinite de termes de la suite. On en choisit une, qu'on note B_0. On pose $K_1 := \overline{B}_0 \cap K$. Par construction K_1 contient une infinité de termes de la suite ;On note $y_0 = x_{\varphi(0)}$, où $\varphi(0)$ est le plus petit indice des termes qui se trouve dans K_1.

Si on a un recouvrement (U_i) de K_1 par des ouverts, alors en ajoutant à cette famille l'ouvert $E \setminus \overline{B}_0$, on obtient un recouvrement de K. On peut en extraire un sous-recouvrement fini, et donc un nombre fini seulement des U_i recouvre K_1. Ainsi K_1 possède la même propriété que K.

On recouvre ensuite K_1 par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$, et on choisit l'une des boules, notée B_1, qui contient une infinité de termes de la suite (x_n). On note $K_2 := \overline{B}_1 \cap K_1$ et on choisit $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $x_{\varphi(1)}$ soit dans K_2.

On procède alors par récurrence, en montrant que tous les K_i satisfont la même propriété sur les recouvrements. Cela donne une suite extraite $(y_n) = (x_{\varphi(n)})$ qui vérifie

$$\forall\, n\ \forall p \geq 0\ ||y_n - y_{n+p}||_E \leq 2^{-n}.$$

Cela montre que la suite est de Cauchy. Plus généralement on a

$$\forall \xi,\ \xi' \in\ K_n, ||\xi - \xi'||_E < 2^{n-1}. \tag{B.1}$$

Montrons maintenant que K est fermé. S'il ne l'est pas, il existe x dans $\overline{K} \setminus K$. Pour ce point, chaque boule fermée $\overline{B}(x, \frac{1}{n})$ rencontre K (puisque la boule ouvert rencontre K) or

$$\cap_n \overline{B}(x, \frac{1}{n}) = \{x\}.$$

On trouve donc une famille de fermés d'intersection vide dans K donc il en existe une sous-famille finie d'intersection vide dans K (Prop.2.2.2). Cela contredit le fait que x est dans $\overline{K}$.

Ainsi K est fermé et donc chaque K_i est fermé et inclus dans K. Comme on a

$$\forall n\ \cap_{i \leq n} K_i = K_n \neq \emptyset,$$

on en déduit que l'intersection de tous les K_i contient au moins un point l (qui est dans K). L'inégalité (B.1) montre que l est la limite des y_n. Ainsi, on vient de construire une suite extraite convergente et K est compact.

Supposons maintenant que K est compact.

Affirmation 3. Pour tout $\varepsilon > 0$ on peut recouvrir K par un nombre fini de boules de rayon ε.

Preuve de l'affirmation. Si l'affirmation est fausse, on construit par récurrence une suite (x_n) vérifiant

$$\forall\, n,\ x_{n+1} \notin \bigcup_{k \leq n} B(x_k, \varepsilon).$$

Par construction, cette suite vérifie

$$\forall, n,\ p\ ||x_n - x_p|| \geq \varepsilon,$$

ce qui montre qu'elle ne peut pas avoir de valeurs d'adhérence et cela contredit l'hypothèse. □

Affirmation 4. Soit (U_i) un recouvrement par des ouverts de K. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule $B(x, \varepsilon)$ est incluse dans un U_i.

Preuve de l'affirmation . Si l'affirmation est fausse, pour tout ε, il existe une boule $B(x, \varepsilon)$ qui n'est incluse dans aucun U_i.En faisant cela pour les $\varepsilon = 1/n$, on construit une suite (x_n) telle que pour tout n, $B(x, \frac{1}{n})$ n'est incluse dans aucun U_i. On prend une valeur d'adhérence de cette suite, notée $x = \lim_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)}$. Le point x et dans un U_i donc il existe $\varepsilon > 0$ et j tels que $x \in B(x, \varepsilon) \subset U_j$.

Par ailleurs, pour n suffisamment grand, $1/n < \frac{\varepsilon}{2}$ et $x_{\varphi(n)}$ est dans la boule $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$. Cela implique que $B(x, \varepsilon)$ contient la boule $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)})$ et cela contredit la propriété de la suite (x_n). □

Nous pouvons achever la preuve du théorème. On se donne un recouvrement par des ouverts U_i. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que tout boule $B(x, \varepsilon)$ est dans un U_i. Par ailleurs on peut recouvrir K par un nombre fini de boules $B(x_n, \varepsilon)$. Chacune de ces boules est donc dans un U_{i_n}. Ces U_{i_n} recouvrent donc K puisque leur union contient l'union des boules $B(x_n, \varepsilon)$.